NOME:			
CURSO:	MATEMÁTICA	DATA:	/ /2013

LISTA 21 – LOGARITMOS

1. (Insper 2013) Para combater um incêndio numa floresta, um avião a sobrevoa acima da fumaça e solta blocos de gelo de uma tonelada. Ao cair, cada bloco se distancia da altitude em que foi solto pelo avião de acordo com a lei $d = 10t^2$, em que t é o tempo em segundos. A massa M do bloco (em quilogramas) varia, em função dessa distância de queda d (em metros), conforme a expressão

$M = 1000 - 250 \log d.$

Se o bloco deve chegar ao chão totalmente derretido, a altitude mínima em que o avião deve soltá-lo e o tempo de queda nesse caso devem ser

a) 10.000 metros e 32 segundos.
b) 10.000 metros e 10 segundos.
c) 1.000 metros e 32 segundos.
d) 2.000 metros e 10 segundos.
e) 1.000 metros e 10 segundos.

2. (Insper 2013) O número de soluções reais da equação $\log_x(x+3) + \log_x(x-2) = 2$ é

a) 0. b) 1. c) 2. d) 3. e) 4.

3. (Ufpa 2013) Sobre a Cisplatina – $PtC\ell_2H_6N_2$ (droga comumente utilizada no combate a tumores, que atua sobre o DNA evitando a replicação das células), é importante considerar que a variação de sua quantidade na corrente sanguínea é usada na determinação da quantidade da droga a ser administrada ao paciente, tendo em conta sua alta toxicidade; a *meia-vida* da droga é definida como sendo o *tempo* que leva para que uma quantidade da droga decresça à metade da quantidade inicial; a variação da quantidade de droga na corrente sanguínea decresce exponencialmente com o tempo; uma certa injeção de Cisplatina gera imediatamente na corrente sanguínea uma concentração de $6\,\mu g/mL$, a qual decresce para $2\,\mu g/mL$ após 48 min.

Com base nessa informação e com o apoio da tabela de valores do logaritmo abaixo, identifica-se que a meia-vida da Cisplatina, em minutos, é de aproximadamente:

x	2	3	4	5	6	7	8	9
$\ell n(x)$	0,7	1,1	1,4	1,6	1,8	1,9	2,1	2,2

a) 25 b) 28 c) 31 d) 34 e) 37

4. (Uerj 2013) Um lago usado para abastecer uma cidade foi contaminado após um acidente industrial, atingindo o nível de toxidez T_0, correspondente a dez vezes o nível inicial. Leia as informações a seguir.

- A vazão natural do lago permite que 50% de seu volume sejam renovados a cada dez dias.
- O nível de toxidez T(x), após x dias do acidente, pode ser calculado por meio da seguinte equação:

$T(x) = T_0 \cdot (0,5)^{0,1x}$

Considere D o menor número de dias de suspensão do abastecimento de água, necessário para que a toxidez retorne ao nível inicial.

Sendo log 2 = 0,3, o valor de D é igual a:

a) 30 b) 32 c) 34 d) 36

5. (Ufsm 2013) Segundo a Organização Mundial do Turismo (OMT), o Ecoturismo cresce a uma taxa de 5% ao ano. No Brasil, em 2011, o Ecoturismo foi responsável pela movimentação de 6,775 bilhões de dólares.

Supondo que o percentual de crescimento incida sobre a movimentação do ano anterior, pode-se expressar o valor movimentado V (em bilhões de dólares), em função do tempo t(em anos), por

$V = 6,775(1,05)^{t-1}$

com $t = 1$ correspondendo a 2011, $t = 2$, a 2012 e assim por diante.

Em que ano o valor movimentado será igual a 13,55 bilhões de dólares?

Dados: $\log 2 = 0,3$ e $\log 1,05 = 0,02$.

a) 2015. b) 2016. c) 2020. d) 2025. e) 2026.

6. (Unicamp 2013) Uma barra cilíndrica é aquecida a uma temperatura de 740°C. Em seguida, é exposta a uma corrente de ar a 40°C. Sabe-se que a temperatura no centro do cilindro varia de acordo com a função

$T(t) = (T_0 - T_{AR}) \times 10^{-t/12} + T_{AR}$

sendo *t* o tempo em minutos, T_0 a temperatura inicial e T_{AR} a temperatura do ar. Com essa função, concluímos que o tempo requerido para que a temperatura no centro atinja 140°C é dado pela seguinte expressão, com o log na base 10:

a) $12[\log(7) - 1]$ minutos.

b) $12[1 - \log(7)]$ minutos.

c) $12\log(7)$ minutos.

d) $[1 - \log(7)]/12$ minutos.

7. (G1 - cftmg 2012) A solução, em $\mathbb{R}$, da equação $6^{2x} - 4.6^x = 0$ é

a) 0. b) 1. c) $\log_4 6$. d) $\log_6 4$.

8. (Fgv 2012) Meia-vida de uma grandeza que decresce exponencialmente é o tempo necessário para que o valor dessa grandeza se reduza à metade.

Uma substância radioativa decresce exponencialmente de modo que sua quantidade, daqui a *t* anos, é

$$Q = A \cdot (0,975)^t.$$

Adotando os valores $\ell n\, 2 = 0,693$ e $\ell n\, 0,975 = -0,025$, o valor da meia-vida dessa substância é aproximadamente:

a) 25,5 anos b) 26,6 anos c) 27,7 anos
d) 28,8 anos e) 29,9 anos

9. (Ime 2012) Se $\log_{10} 2 = x$ e $\log_{10} 3 = y$, então $\log_5 18$ vale:

a) $\frac{x+2y}{1-x}$ b) $\frac{x+y}{1-x}$ c) $\frac{2x+y}{1+x}$

d) $\frac{x+2y}{1+x}$ e) $\frac{3x+2y}{1-x}$

10. (Epcar (Afa) 2012) Considere uma aplicação financeira denominada UNI que rende juros mensais de $M = \log_{27} 196$ e outra aplicação financeira denominada DUNI que rende juros mensais de $N = -\log_{\frac{1}{9}} 14$.

A razão entre os juros mensais M e N, nessa ordem, é
a) 70%
b) $\frac{2}{3}$
c) $\frac{4}{3}$
d) 80%

11. (Espm 2012) Se $\log_{15} 2 = a$ e $\log_{10} 2 = b$, o valor de $\log_{10} 3$ é:

a) $a + \frac{a}{b} - 1$
b) $b + \frac{b}{a} - 1$
c) $a + \frac{b}{a} + 1$
d) $b + \frac{a}{b} + 1$
e) $a + \frac{a}{b} + b$

12. (G1 - ifpe 2012) Nas aplicações financeiras feitas nos bancos são utilizados os juros compostos. A expressão para o cálculo é $C_F = C_O(1+i)^T$ em que C_F é o montante, C_O é o capital, **i** é a taxa e T o tempo da aplicação. Como C_F depende de T, conhecidos C_O e **i**, temos uma aplicação do estudo de função exponencial. Um professor, ao deixar de trabalhar em uma instituição de ensino, recebeu uma indenização no valor de R$ 20.000,00. Ele fez uma aplicação financeira a uma taxa mensal (**i**) de 8%. Após T meses, esse professor recebeu um montante de R$ 43.200,00. Qual foi o tempo T que o dinheiro ficou aplicado?

Obs.: Use log (1,08) = 0,03 e log (2,16) = 0,33
a) 10
b) 11
c) 12
d) 13
e) 14

REFERENCIAL VESTIBULARES

Gabarito:

Resposta da questão 1:
[A]

Quando o bloco estiver totalmente derretido sua massa será $M = 0$.
Determinando, agora a altura, para $M = 0$.

$$1.000 - 250 \cdot \log d = 0 \Rightarrow -250 \cdot \log d = -1.000 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \log d = 4 \Rightarrow d = 10^4 \Rightarrow d = 100.00 \text{ m}$$

Determinando o tempo de queda.

$$10t^2 = 10.000$$
$$t^2 = 1.000$$
$$t \square 32 \text{ s}$$

Resposta da questão 2:
[B]

Sabendo que $\log_c a + \log_c b = \log_c ab$ para a, b e c reais positivos e $c \neq 1$, vem

$$\log_x(x+3) + \log_x(x-2) = 2 \Leftrightarrow \log_x(x+3)(x-2) = 2$$
$$\Leftrightarrow x^2 + x - 6 = x^2$$
$$\Leftrightarrow x = 6.$$

Portanto, $x = 6$ é a única solução real da equação.

Resposta da questão 3:
[C]

A quantidade Q da substância no organismo, em $\mu g/mL$, após t minutos, pode ser dada por $Q = Q_0 \cdot e^{k \cdot t}$, com e sendo o número de Euler. Logo, se a concentração inicial é $6\,\mu g/mL$ e $48 \min$ depois passa a ser de $2\,\mu g/mL$, então

$$2 = 6 \cdot e^{k \cdot 48} \Leftrightarrow e^k = 3^{-\frac{1}{48}}.$$

Portanto, a meia-vida da cisplatina é tal que

$$\frac{Q_0}{2} = Q_0 \cdot (3^{-\frac{1}{48}})^t \Leftrightarrow \ell n\, 2^{-1} = \ell n\, 3^{-\frac{t}{48}}$$
$$\Leftrightarrow -\ell n\, 2 = -\frac{t}{48} \cdot \ell n\, 3$$
$$\Rightarrow t = \frac{0,7}{1,1} \cdot 48$$
$$\Rightarrow t \cong 31 \min.$$

Resposta da questão 4:
[C]

$$T(x) = 10^{-1} \cdot T_0$$
$$10^{-1} \cdot T_0 = T_0 \cdot 0,5^{0,1x}$$
$$\log 10^{-1} = \log(0,5)^{0,1x}$$
$$-1 = 0,1x \cdot (\log 1 - \log 2)$$
$$-1 = 0,1x \cdot (0 - 0,3)$$
$$-1 = -0,03x$$
$$x = 33,3333...$$

Logo, D = 34.

Resposta da questão 5:
[E]

$$13,55 = 6,775 \cdot (1,05)^{t-1}$$
$$2 = (1,05)^{t-1}$$
$$\log(2) = \log(1,05)^{t-1}$$
$$0,3 = (t-1) \cdot \log 1,05$$
$$0,3 = (t-1) \cdot 0,02$$
$$15 = t - 1$$
$$t = 16$$

$t = 1$, representa 2011.
$t = 16$, representa o ano de 2026.

Resposta da questão 6:
[C]

De acordo com os dados do problema, temos:

$$T(t) = (T_0 - T_{AR}) \times 10^{-t/12} + T_{AR}$$

$$140 = (740 - 40) \times 10^{-t/12} + 40$$
$$100 = 700 \times 10^{-t/12}$$
$$10^{-t/12} = \frac{1}{7}$$
$$\log 10^{-t/12} = \log 7^{-1}$$
$$-\frac{t}{12} = -\log 7$$
$$t = 12 \log 7 \text{ minutos}$$

Resposta da questão 7:
[D]

Fatorando o primeiro membro da equação, tem-se:

$$6^x \cdot (6^x - 4) = 0 \Rightarrow 6^X = 0 \text{ (não convém) ou}$$
$$6^x - 4 = 0$$
$$6^x = 4$$
$$x = \log_6 4.$$

REFERENCIAL VESTIBULARES

Resposta da questão 8:
[C]

$$Q = A \cdot (0,975)^t$$
$$\frac{A}{2} = A \cdot (0,975)^t$$
$$\ell n \frac{1}{2} = \ell n (0,975)^t$$
$$\ell n 1 - \ell n 2 = t.\ell n(0,975)$$
$$0 - 0,693 = t.(-0,025)$$
$$-0,693 = -0,025t$$
$$t \square 27,7.$$

Resposta da questão 9:
[A]

$$\log_5 18 = \frac{\log(3^2 \cdot 2)}{\log 5} = \frac{\log 3^2 + \log 2}{\log \frac{10}{2}} = \frac{2\log 3 + \log 2}{\log 10 - \log 2} = \frac{x + 2y}{1 - x}.$$

Resposta da questão 10:
[C]

Aplicando as propriedades dos logaritmos, temos:

$$\frac{M}{N} = \frac{\log_{27} 196}{-\log_{\frac{1}{9}} 14} = \frac{\log_{3^3} 14^2}{-\log_{3^{-2}} 14} = \frac{\frac{2}{3}\log_3 14}{-\left(-\frac{1}{2}\right)\log_3 14} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{4}{3}.$$

Resposta da questão 11:
[B]

Escrevendo $\log_{15} 2$ na base 10, obtemos

$$\log_{15} 2 = \frac{\log_{10} 2}{\log_{10}\left(\frac{30}{2}\right)}$$
$$= \frac{\log_{10} 2}{\log_{10}(3 \cdot 10) - \log_{10} 2}$$
$$= \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} 3 + \log_{10} 10 - \log_{10} 2}.$$

Portanto, sabendo que $\log_{15} 2 = a$ e $\log_{10} 2 = b$, vem

$$a = \frac{b}{1 - b + \log_{10} 3} \Leftrightarrow 1 - b + \log_{10} 3 = \frac{b}{a}$$
$$\Leftrightarrow \log_{10} 3 = b + \frac{b}{a} - 1.$$

Resposta da questão 12:
[B]

$$43200 = 2000(1 + 0,08)^T$$
$$2,16 = (1,08)^T$$
$$\log(2,16) = \log(1,08)^T$$
$$0,33 = T \cdot 0,03$$
$$T = 11$$

REFERENCIAL VESTIBULARES