LISTA 46 – SISTEMAS LINEARES

1. (Unesp 2013) Uma coleção de artrópodes é formada por 36 exemplares, todos eles íntegros e que somam, no total da coleção, 113 pares de patas articuladas. Na coleção não há exemplares das classes às quais pertencem o caranguejo, a centopeia e o piolho-de-cobra.
Sobre essa coleção, é correto dizer que é composta por exemplares das classes *Insecta* e
a) *Arachnida*, com maior número de exemplares da classe *Arachnida*.
b) *Diplopoda*, com maior número de exemplares da classe *Diplopoda*.
c) *Chilopoda*, com igual número de exemplares de cada uma dessas classes.
d) *Arachnida*, com maior número de exemplares da classe *Insecta*.
e) *Chilopoda*, com maior número de exemplares da classe *Chilopoda*.

2. (Ufrgs 2013) O sistema de equações
$$\begin{cases} 5x + 4y + 2 = 0 \\ 3x - 4y - 18 = 0 \end{cases}$$
possui
a) nenhuma solução.
b) uma solução.
c) duas soluções.
d) três soluções.
e) infinitas soluções.

3. (Ita 2013) Considere o sistema de equações $\begin{cases} ax + by = c \\ px + qy = d \end{cases}$, com *a*, *b*, *c*, *d*, *p* e *q* reais, $abcd \neq 0$, $a + b = m$ e $d = nc$. Sabe-se que o sistema é indeterminado. O valor de $p + q$ é

a) m b) $\frac{m}{n}$ c) $m^2 - n^2$ d) mn e) $m + n$

4. (Espm 2013) O sistema $\begin{cases} ax + 4y = a^2 \\ x + ay = -2 \end{cases}$, em x e y, é possível e indeterminado se, e somente se:
a) $a \neq -2$ b) $a \neq 2$ c) $a = \pm 2$ d) $a = -2$ e) $a = 2$

5. (Ufsm 2013) Num determinado mês, em uma unidade de saúde, foram realizadas 58 hospitalizações para tratar pacientes com as doenças A, B e C. O custo total em medicamentos para esses pacientes foi de R$39.200,00.
Sabe-se que, em média, o custo por paciente em medicamentos para a doença A é R$450,00, para a doença B é R$800,00 e para a doença C é R$1.250,00. Observa-se também que o número de pacientes com a doença A é o triplo do número de pacientes com a doença C. Se a, b e c representam, respectivamente, o número de pacientes com as doenças A, B e C, então o valor de $a - b - c$ é igual a
a) 14.
b) 24.
c) 26.
d) 36.
e) 58.

6. (G1 - epcar (Cpcar) 2013) Pitágoras e Tales possuem hoje, cada um, certa quantia em reais. Se Pitágoras desse para Tales 50 reais, eles ficariam com a mesma quantia em reais, cada um. Porém se Tales desse para Pitágoras 100 reais, Tales passaria a ter $\frac{1}{4}$ da quantia de Pitágoras.
Dessa forma, é correto afirmar que
a) a quantia que os dois possuem hoje, juntos, é menor que 600 reais.
b) Pitágoras possui hoje, $\frac{2}{3}$ do que Tales possui.
c) Tales possui hoje, mais que 220 reais.
d) a diferença entre os valores que eles possuem hoje é menor que 100 reais.

7. (Ufpe 2013) Sobre o sistema de equações lineares apresentado abaixo, analise as proposições a seguir, sendo a um parâmetro real.
$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + ay + 2z = 1 \\ 2x + y + z = 3 \end{cases}$$
( ) Se $a = 2$, então o sistema admite infinitas soluções.
( ) O sistema sempre admite solução.
( ) Quando o sistema admite solução, temos que $x = 1$.
( ) Se $a \neq 2$, então o sistema admite uma única solução.
( ) Se $a = 1$, então o sistema admite a solução (1, 2, –1).

8. (Ufsj 2013) Considere o seguinte sistema de equações lineares, nas incógnitas x, y e z:
$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0 \end{cases}$$
Sobre seu conjunto solução, é **CORRETO** afirmar que ele
a)possui infinitas soluções quando $\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \neq 0$
b)possui uma única solução quando $\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = 0$
c)possui infinitas soluções quando $\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = 0$
d) não possui solução quando $\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \neq 0$

9. (Upe 2013) Em uma floricultura, é possível montar arranjos diferentes com rosas, lírios e margaridas. Um arranjo com 4 margaridas, 2 lírios e 3 rosas custa 42 reais. No entanto, se o arranjo tiver uma margarida, 2 lírios e uma rosa, ele custa 20 reais. Entretanto, se o arranjo tiver 2 margaridas, 4 lírios e uma rosa, custará 32 reais. Nessa floricultura, quanto custará um arranjo simples, com uma margarida, um lírio e uma rosa?
a) 5 reais
b) 8 reais
c) 10 reais
d) 15 reais
e) 24 reais

10. (Ufsj 2013) Observe o sistema linear de variáveis x, y e z:

$$\begin{cases} x+y-2z=4 \\ 2x+ky-4z=8 \\ 3x+3y+kz=3 \end{cases}$$

Com base no sistema, é **CORRETO** afirmar que se
a) $k=3$, o sistema admite solução única.
b) $k=6$, o sistema é impossível.
c) $k=-2$, o sistema admite infinitas soluções.
d) $k=-6$, o sistema é homogêneo e admite solução $(0,0,0)$.

11. (Uem 2013) Considere o seguinte sistema linear:
$\begin{cases} x-2y+az=3 \\ bx+2y-2z=0 \\ 4x-2y+2z=6 \end{cases}$, em que a e b são coeficientes reais.
A respeito desse sistema e de seus conhecimentos sobre o assunto, assinale o que for **correto**.
01) Se a tripla (1,2,3) é uma solução do sistema linear, então o sistema é possível e indeterminado.
02) Se $a=b=0$, o sistema linear é impossível.
04) Existem *a*, *b* reais, tais que a tripla (1,0,1) é uma solução do sistema linear.
08) Se $a=2$ e $b=-1$, o sistema linear é impossível.
16) Se $y=z$ e $b=0$, o sistema linear é possível para qualquer valor de *a*.

12. (Ufsj 2013) Observe o sistema de variáveis x, y, z e t.

$$\begin{cases} x+y+z+t=4 \\ x+y+z=0 \\ x+y+t=2 \\ x+z+t=4 \end{cases}$$

Com base no sistema, é **CORRETO** afirmar que sua solução, considerando x, y, z e t, nessa ordem, forma uma progressão
a) geométrica decrescente.
b) aritmética decrescente.
c) geométrica crescente.
d) aritmética crescente.

13. (Ufmg 2013) Considere o seguinte sistema linear nas incógnitas *x* e *y*

$$\begin{cases} 2x+3y=2 \\ 6x+ay=3 \end{cases}$$

Observando-se que o coeficiente de *y* na segunda equação é um parâmetro *a*,
a) DETERMINE para quais valores de *a* o sistema tem solução.
b) DETERMINE as soluções *x* e *y* em função do parâmetro *a*, caso o sistema tenha solução.
c) DETERMINE todos os valores de *a* para os quais o sistema tenha como solução números **inteiros** *x* e *y*.

14. (Fuvest 2012) Em uma festa com *n* pessoas, em um dado instante, 31 mulheres se retiraram e restaram convidados na razão de 2 homens para cada mulher. Um pouco mais tarde, 55 homens se retiraram e restaram, a seguir, convidados na razão de 3 mulheres para cada homem. O número *n* de pessoas presentes inicialmente na festa era igual a
a) 100
b) 105
c) 115
d) 130
e) 135

15. (G1 - ifsc 2012) A alternativa **CORRETA** que indica o valor de ***a*** para que a seguinte equação matricial admita somente a solução trivial é:

$$\begin{pmatrix} 4 & 8 & a \\ -1 & 2 & 1 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) $a=\frac{10}{3}$
b) $a=\frac{20}{3}$
c) $a\neq-\frac{20}{3}$
d) $a\neq\frac{20}{3}$
e) $a\neq\frac{10}{3}$

Gabarito:

Resposta da questão 1: [D]

[Resposta do ponto de vista da disciplina de Biologia]
A questão pode ser resolvida por meio de um sistema linear composto por duas equações: sejam x e y, respectivamente, o número de insetos e de aracnídeos na coleção, e 6x e 8y o número respectivo de patas. Então:

$$\begin{cases} x+y=36 \\ 6x+8y=226 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=36-y \\ 6x+8y=226 \end{cases} \Rightarrow 6(36-y)+8y=226 \Rightarrow$$

$$216-6y+8y=226 \Rightarrow 2y=10 \Rightarrow y=5$$

Substituindo: $x=36-5 \Rightarrow x=31.$

Logo, na coleção há 5 aracnídeos e 31 insetos.

[Resposta do ponto de vista da disciplina de Matemática]
Considerando as classes do Filo *Arthropoda*, nesta coleção estariam presentes somente representantes das classes *Insecta* e *Arachnida*.
Considerando que x é o número de aracnídeos (8 patas) e y o número de insetos (6 patas), podemos escrever:

$$\begin{cases} x+y=36(-6) \\ 8x+6y=226 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6x-6y=-216 \ \ (\text{I}) \\ 8x+6y=226 \ \ (\text{II}) \end{cases}$$

Fazendo (II) – (I), temos:
2x = 10
x = 5 (aracnídeos) e y = 31 (insetos)
Resposta [D].

Resposta da questão 2: [B]

Como $\frac{5}{3} \neq \frac{4}{-4},$ segue que o sistema é possível e determinado, ou seja, possui uma solução.

Resposta da questão 3: [D]
Para que o sistema acima seja indeterminado os determinantes D_x e D_y deverão ser iguais a zero

$$\begin{vmatrix} a & c \\ p & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c & b \\ d & q \end{vmatrix} = 0$$

Logo,

$$ad-pc=cq-bd$$

$$d.(a+b)=c.(p+q)$$

$$n.c.m = c.(p+q)$$

$$p+q=m.n$$

Resposta da questão 4: [D]

O sistema é possível e indeterminado se, e somente se,

$$\frac{a}{1}=\frac{4}{a}=\frac{a^2}{-2} \Leftrightarrow a=-2.$$

Resposta da questão 5: [A]
De acordo com as informações, obtemos

$$\begin{cases} a=3c \\ a+b+c=58 \\ 450a+800b+1250c=39200 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3c \\ b+4c=58 \\ 4b+13c=196 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=36 \\ b=10. \\ c=12 \end{cases}$$

Portanto, $a-b-c=36-10-12=14.$

Resposta da questão 6: [A]

Pitágoras possui p reais e Tales possui t reais. Temos, então, o sistema abaixo:

$$\begin{cases} p-50=t+50 \\ t-100=\dfrac{p+100}{4} \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos t = 200 e p = 300.
Portanto, a quantia que os dois possuem hoje, juntos, é menor que 600 reais.

Resposta da questão 7: F – F – V – V – V.

Calculando o determinante da matriz dos coeficientes, encontramos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a+4+1-(2a+1+2)=-a+2.$$

Para $a=2$ esse determinante se anula. Tomemos a matriz ampliada do sistema, com $a=2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aplicando as operações elementares sobre as linhas dessa matriz, encontramos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Desse modo, podemos concluir que para $a=2$ o sistema é impossível, e que para $a \neq 2$ o sistema é possível e determinado.

Para $a \neq 2,$ a matriz ampliada fica

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & a & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aplicando as operações elementares sobre as linhas dessa matriz, obtemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -a+2 & -a \end{pmatrix}.$$

Daí, segue que $z=\frac{a}{a-2},$ $y=-\frac{2}{a-2}$ e $x=1,$ para todo $a \neq 2.$

Se $a=1,$ então $z=\frac{1}{1-2}=-1,$ $y=-\frac{2}{1-2}=2$ e $x=1.$
Logo, a terna ordenada $(1, 2, -1)$ é solução do sistema.
Resposta da questão 8: [C]

Um sistema Linear homogêneo terá infinitas soluções quando o determinante dos seus coeficientes for igual a zero, logo:

$$\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = 0$$

Resposta da questão 9: [D]

Sejam x, y e z, respectivamente, os preços unitários das margaridas, lírios e rosas.

De acordo com as informações, obtemos o sistema

$$\begin{cases} 4x + 2y + 3z = 42 \\ x + 2y + z = 20 \\ 2x + 4y + z = 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 20 \\ 4x + 2y + 3z = 42 \\ 2x + 4y + z = 32 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 20 \\ -6y - z = -38 \\ -z = -8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 5. \\ z = 8 \end{cases}$$

Portanto, o resultado pedido é

$$x + y + z = 2 + 5 + 8 = R\$\,15{,}00.$$

Resposta da questão 10: [A]

Calculando o determinante dos coeficientes, temos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & k & -4 \\ 3 & 3 & k \end{vmatrix} = (k-2),(k+6)$$

O sistema admite solução única se $k \neq 2$ ou $k \neq -6$ o sistema admite solução única. Portanto, a alternativa [A] é a correta.

Resposta da questão 11: 01 + 04 + 08 = 13.

[01] **Verdadeira**. Se (1, 2, 3) for solução do sistema temos a = 2 e b = -1 e o sistema terá como determinante dos coeficientes $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 4 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0$, portanto terá infinitas soluções.

[02] **Falsa**, pois se a = b = 0 o determinante dos coeficientes será $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 4 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 16$ e o sistema terá solução única.

[04] **Verdadeira**, pois

$1 - 2\cdot 0 + a \cdot 1 = 3 \Rightarrow a = 2$

$b \cdot 1 + 2 \cdot 0 - 2 \cdot 1 = 0 \Rightarrow b = 2$

[08] **Verdadeira**. Se a = 2 e b = -1 as duas equações serão:

$x - 2y + 2z = 3$ e $-x + 2y - 2z = 0$, somando estas suas equações encontramos a contradição 0 = 3, portanto o sistema é impossível.

[16] **Falsa**. Admitindo y = z e b = 0, temos o seguinte sistema $\begin{cases} x + (a-2)y = 3 \\ 4x = 6 \end{cases}$, se a = 2 o sistema é impossível.

Resposta da questão 12: [D]

Resolvendo o sistema, temos:

$$\begin{cases} x + y + z + t = 4 \\ x + y + z \quad = 0 \\ x + y \quad + t = 2 \\ x \quad + z + t = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z + t = 4 \\ 0 + 0 + 0 - t = -4 \\ 0 + 0 - z + 0 = -2 \\ 0 - y + 0 + 0 = 0 \end{cases}$$

x = - 2, y = 0, z = 2 e t = 4. S = {(-2,0,2,4)}. Uma P.A. crescente de razão r = 2.

Resposta da questão 13:

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ 6x + ay = 3 \end{cases}$

Multiplicando a primeira equação por –3 e somando os resultados com a segunda, temos a seguinte equação: (a – 9)y = –3, que terá solução se, e somente se, $a \neq 9$

b) Do item (a), concluímos que $y = \dfrac{3}{9-a}$ e que $x = \dfrac{2a-9}{2\cdot(a-9)}$.

c) x = i + 3y/2 o que nos leva a concluir que o valor de y deverá ser par, portanto y = 2.n, com n inteiro.

$\dfrac{3}{9-a} = 2n \Rightarrow a = \dfrac{18n-3}{2n}$, com $n \in \mathbb{N}^*$.

Resposta da questão 14: [D]

n = x (número de homens) + y (n^o de mulheres).

De acordo com o problema, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x = 2(y-31) \\ y - 31 = 3.(x-55) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = -62 \\ -3x + y = -134 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos x = 66 e y = 64.

Logo, n = 66 + 64 = 130.

Resposta da questão 15: [D]

Para que a equação matricial acima admita somente a solução trivial, o determinante $\begin{vmatrix} 4 & 8 & a \\ -1 & 2 & 1 \\ 6 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ deverá ser diferente de zero.

Calculando o determinante, teremos a seguinte desigualdade:

$$16 + 0 + 48 - 12 \cdot a + 16 - 0 \neq 0$$

$$-12 \cdot a \neq -80$$

$$a \neq \frac{80}{12}$$

$$a \neq \frac{20}{3}$$