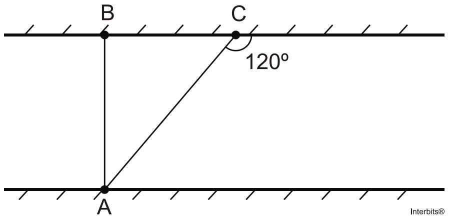
LISTA 18 – TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO

1. (G1 - cftmg 2013) O percurso reto de um rio, cuja correnteza aponta para a direita, encontra-se representado pela figura abaixo. Um nadador deseja determinar a largura do rio nesse trecho e propõe-se a nadar do ponto **A** ao **B**, conduzindo uma corda, a qual tem uma de suas extremidades retida no ponto **A**. Um observador localizado em **A** verifica que o nadador levou a corda até o ponto **C**.

Dados:

α	30°	45°	60°
sen α	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$
cos α	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2
tg α	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$



Nessas condições, a largura do rio, no trecho considerado, é expressa por

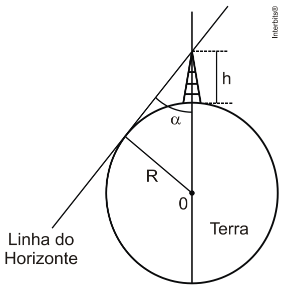
a) $\frac{1}{3}\overline{AC}.$ b) $\frac{1}{2}\overline{AC}.$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{AC}.$ d) $\frac{3\sqrt{3}}{3}\overline{AC}.$

2. (G1 - utfpr 2013) Um caminhão, cuja carroceria está a uma altura de 1,2 m do chão está estacionado em um terreno plano. Deseja-se carregar uma máquina pesada neste caminhão e para isso será colocada uma rampa da carroceria do caminhão até o chão. O comprimento mínimo da rampa para que esta forme com o chão um ângulo máximo de 30° é, em metros, de:

(Considere: $\text{sen } 30° = \frac{1}{2}$, $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\text{tg } 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$)

a) $0{,}8\sqrt{3}.$ b) 2,4. c) $1{,}2\sqrt{3}.$ d) $0{,}6\sqrt{3}.$ e) 0,6.

3. (Espcex (Aman) 2013) Em uma das primeiras tentativas de determinar a medida do raio da Terra, os matemáticos da antiguidade observavam, do alto de uma torre ou montanha de altura conhecida, o ângulo sob o qual se avistava o horizonte, tangente à Terra, considerada esférica, conforme mostra a figura. Segundo esse raciocínio, o raio terrestre em função do ângulo α é dado por:



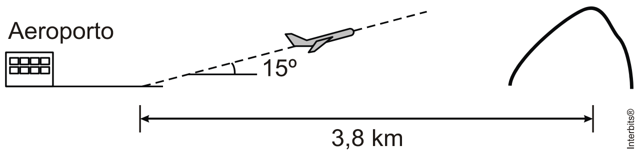
a) $R = \frac{\text{sen}(\alpha h)}{1 - \text{sen}\alpha}$ b) $R = \frac{h\,\text{sen}\alpha}{1 - \text{sen}\alpha}$ c) $R = \frac{h\,\text{sen}\alpha}{\text{sen}\alpha - 1}$

d) $R = \frac{1 - \text{sen}\alpha}{h\,\text{sen}\alpha}$ e) $R = \frac{1 + \text{sen}\alpha}{h\,\text{sen}\alpha}$

4. (Ufg 2013) Um topógrafo deseja calcular a largura de um rio em um trecho onde suas margens são paralelas e retilíneas. Usando como referência uma árvore, *A*, que está na margem oposta, ele identificou dois pontos *B* e *C*, na margem na qual se encontra, tais que os ângulos $A\hat{B}C$ e $A\hat{C}B$ medem 135° e 30°, respectivamente. O topógrafo, então, mediu a distância entre *B* e *C*, obtendo 20 metros.
Considerando-se o exposto, calcule a largura do rio.

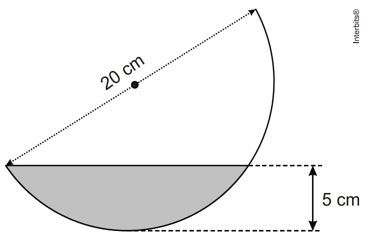
Dado: $\sqrt{3} \approx 1{,}7.$

5. (Unicamp 2013) Ao decolar, um avião deixa o solo com um ângulo constante de 15°. A 3,8 km da cabeceira da pista existe um morro íngreme. A figura abaixo ilustra a decolagem, fora de escala.



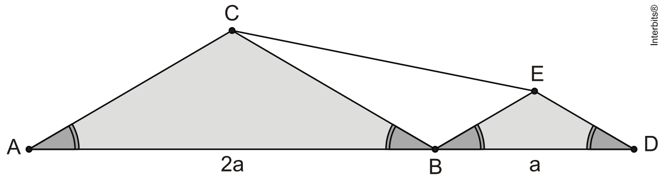
Podemos concluir que o avião ultrapassa o morro a uma altura, a partir da sua base, de
a) 3,8 tan (15°) km. b) 3,8 sen (15°) km.
c) 3,8 cos (15°) km. d) 3,8 sec (15°) km.

6. (Ufpr 2013) Um recipiente, no formato de hemisfério, contém um líquido que tem profundidade máxima de 5 cm. Sabendo que a medida do diâmetro do recipiente é de 20 cm, qual o maior ângulo, em relação à horizontal, em que ele pode ser inclinado até que o líquido alcance a borda, antes de começar a derramar?



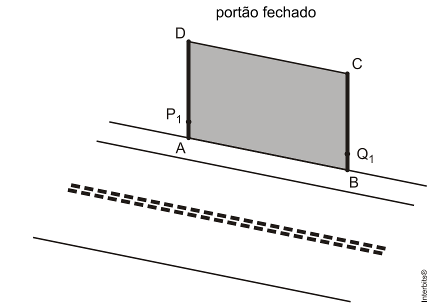
a) 75°.
b) 60°.
c) 45°.
d) 30°.
e) 15°.

7. (Unicamp 2013) Na figura abaixo, ABC e BDE são triângulos isósceles semelhantes de bases 2a e a, respectivamente, e o ângulo $C\hat{A}B = 30°$. Portanto, o comprimento do segmento CE é:

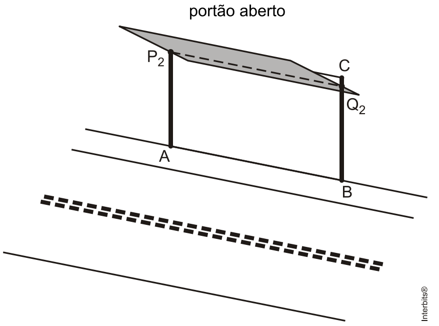


a) $a\sqrt{\frac{5}{3}}$ b) $a\sqrt{\frac{8}{3}}$ c) $a\sqrt{\frac{7}{3}}$ d) $a\sqrt{2}$

TEXTO PARA A PRÓXIMA QUESTÃO:
O acesso à garagem de um edifício é guardado por um portão retangular que fica normalmente fechado. Para abrir a passagem para os veículos que por ali circulam, o portão sobe e se inclina, conforme figuras abaixo.



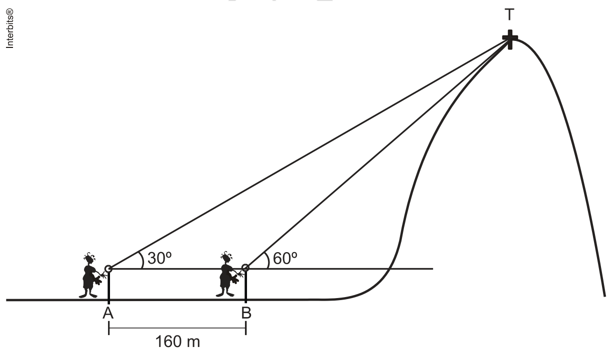
Distantes 0,5 m do nível da calçada (pontos A e B), os pontos P_1 e Q_1 indicam as posições das extremidades de um eixo que sustenta o portão.



O portão, que tem 3 m de altura, sobe e simultaneamente gira 60 graus em torno desse eixo, até ficar totalmente aberto, suspenso nas posições indicadas por P_2 e Q_2.

8. (Insper 2013) Se o portão, quando totalmente aberto, deve deixar uma passagem livre de pelo menos 2 m de altura, a menor distância dos pontos P_2 e Q_2 em relação ao nível da calçada, indicado pelos pontos A e B, deve ser de
a) 2,05 m. b) 2,15 m. c) 2,25 m. d) 2,35 m. e) 2,45 m.

9. (Ufsj 2012) O teodolito é um instrumento de medida de ângulos bastante útil na topografia. Com ele, é possível determinar distâncias que não poderiam ser medidas diretamente. Para calcular a altura de um morro em relação a uma região plana no seu entorno, o topógrafo pode utilizar esse instrumento adotando o seguinte procedimento: situa o teodolito no ponto A e, mirando o ponto T no topo do morro, mede o ângulo de 30° com a horizontal; desloca o teodolito 160 metros em direção ao morro, colocando-o agora no ponto B, do qual, novamente mirando o ponto T, mede o ângulo de 60° com a horizontal.

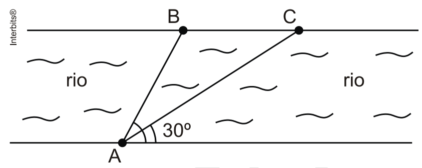


Se a altura do teodolito é de 1,5 metros, é **CORRETO** afirmar que a altura do morro com relação à região plana à qual pertencem A e B é, em metros:

a) $80\sqrt{3}+1{,}5$
b) $80\sqrt{3}-1{,}5$
c) $\dfrac{160\sqrt{3}}{3}+1{,}5$
d) $\dfrac{160\sqrt{3}}{3}-1{,}5$

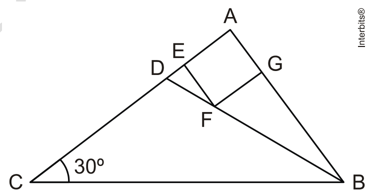
10. (Ufjf 2012) A figura abaixo representa um rio plano com margens retilíneas e paralelas. Um topógrafo situado no ponto *A* de uma das margens almeja descobrir a largura desse rio. Ele avista dois pontos fixos *B* e *C* na margem oposta. Os pontos *B* e *C* são visados a partir de *A*, segundo ângulos de 60° e 30°, respectivamente, medidos no sentido anti-horário a partir da margem em que se encontra o ponto *A*. Sabendo que a distância de *B* até *C* mede $100\ \text{m}$, qual é a largura do rio?

a) $50\sqrt{3}\ \text{m}$
b) $75\sqrt{3}\ \text{m}$
c) $100\sqrt{3}\ \text{m}$
d) $150\sqrt{3}\ \text{m}$
e) $200\sqrt{3}\ \text{m}$

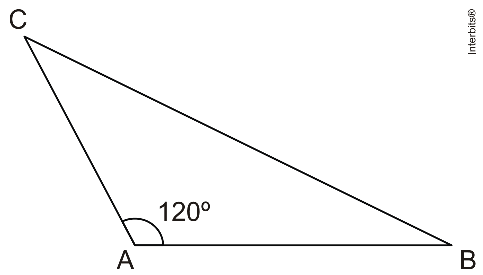


11. (Uftm 2012) Na figura, AEFG é um quadrado, e $\overline{BD}$ divide o ângulo $A\hat{B}C$ ao meio.
Sendo $CD = 2\sqrt{3}\ \text{cm}$, o lado do quadrado AEFG, em centímetros, mede

a) $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$.
b) $\sqrt{3}-1$.
c) $\dfrac{6(\sqrt{3}-1)}{5}$.
d) $\dfrac{4(\sqrt{3}-1)}{3}$.
e) $\dfrac{3(\sqrt{3}-1)}{2}$.



12. (Uftm 2012) Na figura estão posicionadas as cidades vizinhas A, B e C, que são ligadas por estradas em linha reta. Sabe-se que, seguindo por essas estradas, a distância entre A e C é de 24 km, e entre A e B é de 36 km.

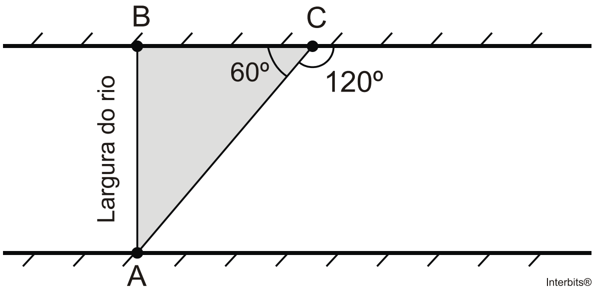


Nesse caso, pode-se concluir que a distância, em km, entre B e C é igual a

a) $8\sqrt{17}$.
b) $12\sqrt{19}$.
c) $12\sqrt{23}$.
d) $20\sqrt{15}$.
e) $20\sqrt{13}$.

Gabarito:

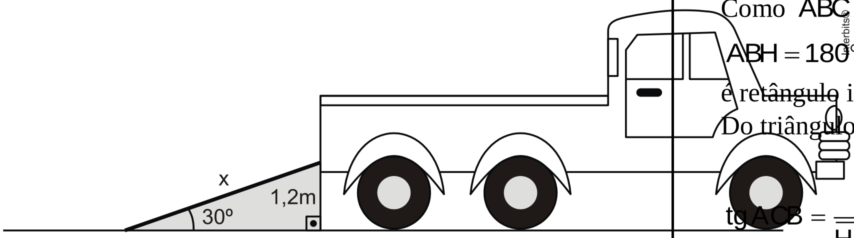
Resposta da questão 1:
[C]



No triângulo ABC, assinalado na figura, temos:

$$\text{sen}60^\circ = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AB = AC \cdot \text{sen}60^\circ \Leftrightarrow AB = \frac{\sqrt{3} \cdot AC}{2}$$

Resposta da questão 2:
[B]

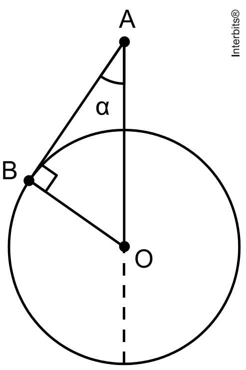


No triângulo assinalado, temos:

$$\text{sen}30^\circ = \frac{1{,}2}{x} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1{,}2}{x} \Rightarrow x = 2{,}4$$

Resposta da questão 3:
[B]

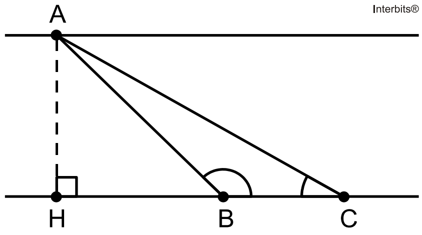
Supondo que a Terra seja uma esfera, considere a figura.



Como AB é tangente à esfera, segue que $OB \perp AB$. Além disso, $\overline{AO} = h + R$ e $\overline{OB} = R$. Portanto, do triângulo AOB, obtemos

$$\begin{aligned} \text{sen}\,\alpha = \frac{\overline{OB}}{\overline{AO}} &\Leftrightarrow \text{sen}\,\alpha = \frac{R}{h+R} \\ &\Leftrightarrow R = h\,\text{sen}\,\alpha + R\,\text{sen}\,\alpha \\ &\Leftrightarrow R - R\,\text{sen}\,\alpha = h\,\text{sen}\,\alpha \\ &\Leftrightarrow R(1-\text{sen}\,\alpha) = h\,\text{sen}\,\alpha \\ &\Leftrightarrow R = \frac{h\,\text{sen}\,\alpha}{1-\text{sen}\,\alpha}. \end{aligned}$$

Resposta da questão 4:
Considere a figura, em que H é o pé da perpendicular baixada de A sobre a reta $\overleftrightarrow{BC}$.



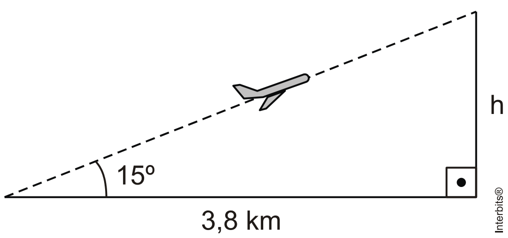
Como $A\hat{B}C = 135^\circ$, segue que $A\hat{B}H = 180^\circ - A\hat{B}C = 45^\circ$ e, portanto, o triângulo ABH é retângulo isósceles. Logo, $\overline{AH} = \overline{HB}$.
Do triângulo AHC, obtemos

$$\begin{aligned} \text{tg}\,A\hat{C}B = \frac{\overline{AH}}{\overline{HB} + \overline{BC}} &\Leftrightarrow \text{tg}30^\circ = \frac{\overline{AH}}{\overline{AH} + 20} \\ &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\overline{AH}}{\overline{AH} + 20} \\ &\Leftrightarrow \overline{AH} = \frac{20\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} \\ &\Leftrightarrow \overline{AH} = 10(\sqrt{3}+1) \\ &\Rightarrow \overline{AH} \cong 27 \text{ m}. \end{aligned}$$

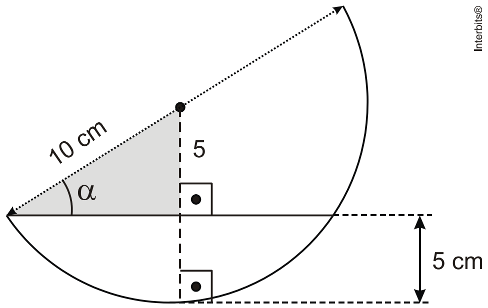
Resposta da questão 5:
[A]

h = altura do avião ao ultrapassar o morro.

$$\tan 15^\circ = \frac{h}{3{,}8} \Rightarrow h = 3{,}8 \cdot \text{tg}\,15^\circ$$

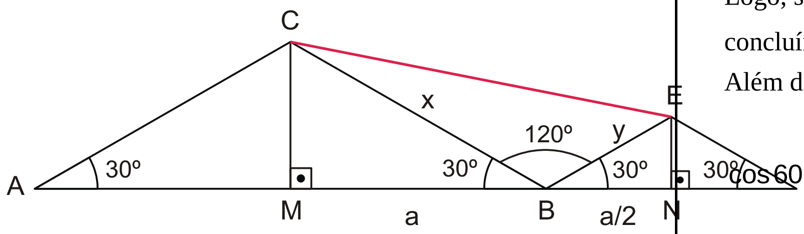


Resposta da questão 6:
[D]



$$\text{sen}\alpha = \frac{5}{10} \Rightarrow \alpha = 30°$$

Resposta da questão 7:
[C]



$$\text{No } \Delta CMB: \ \cos 30° = \frac{a}{x} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{x} \Rightarrow x = \frac{2a}{\sqrt{3}}$$

$$\text{No } \Delta ENB: \ \cos 30° = \frac{\frac{a}{2}}{y} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{2y} \Rightarrow y = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$C\hat{B}E = 180° - 30° - 30° = 120°$$

Aplicando o teorema dos cossenos no triângulo CBE, temos:

$$CE^2 = x^2 + y^2 - 2.x.y.\cos 120°$$

$$CE^2 = \frac{4a^2}{3} + \frac{a^2}{3} - 2 \cdot \frac{2a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

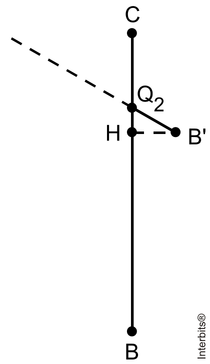
$$CE^2 = \frac{5a^2}{3} + \frac{2a^2}{3}$$

$$CE^2 = \frac{7a^2}{3}$$

$$CE = a.\sqrt{\frac{7}{3}}$$

Resposta da questão 8:
[C]

Considere a vista lateral do portão, sendo H a projeção ortogonal de B' sobre BC e $H\hat{Q_2}B' = 60°$.



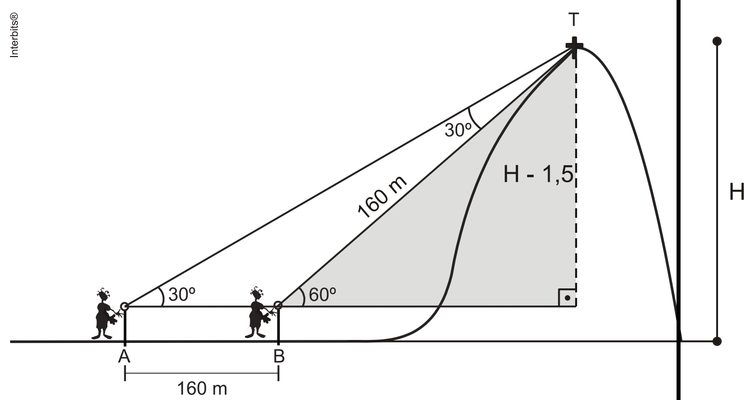
Queremos calcular o menor valor de $\overline{BQ_2}$.
Como $\overline{B'Q_2} = 0{,}5\text{ m}$, segue que a medida de BQ_2 é mínima quando a medida de BH também for mínima.
Logo, sabendo que o menor vão possível mede 2 m, concluímos que $\overline{BH} = 2\text{ m}$.
Além disso, do triângulo retângulo $B'Q_2H$, segue que

$$\cos 60° = \frac{\overline{Q_2H}}{\overline{B'Q_2}} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{\overline{Q_2H}}{0{,}5}$$
$$\Leftrightarrow \overline{Q_2H} = 0{,}25\text{ m}.$$

Portanto, o valor mínimo de $\overline{BQ_2}$ é igual a

$$\begin{aligned}\overline{BQ_2} &= \overline{BH} + \overline{HQ_2} \\ &= 2 + 0{,}25 \\ &= 2{,}25\text{ m}.\end{aligned}$$

Resposta da questão 9:
[A]



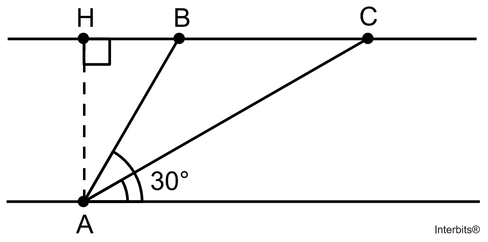
H é a altura do morro em metros.
O triângulo ABT é isósceles, logo BT =160m.

No triângulo assinalado, temos:

$$\text{sen}60° = \frac{H-1{,}5}{160} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{H-1{,}5}{160} \Rightarrow H = \left(80\sqrt{3} + 1{,}5\right)\text{m}$$

Resposta da questão 10:
[A]

Considere a figura, em que H é o pé da perpendicular baixada de A sobre a reta $\overleftrightarrow{BC}.$



Queremos calcular $\overline{AH}.$

Temos que $CAB = BAH = 30°.$ Logo, do triângulo $AHB,$ vem

$$\text{tg}BAH = \frac{\overline{HB}}{\overline{AH}} \Leftrightarrow \overline{HB} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \overline{AH}.$$

Por outro lado, do triângulo $AHC,$ obtemos

$$\begin{aligned} \text{tg}CAH = \frac{\overline{HB} + \overline{BC}}{\overline{AH}} &\Leftrightarrow \sqrt{3} \cdot \overline{AH} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \overline{AH} + 100 \\ &\Leftrightarrow \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \overline{AH} = 100 \\ &\Leftrightarrow \overline{AH} = \frac{150}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 50\sqrt{3}\text{ m.} \end{aligned}$$

Resposta da questão 11:
[E]

Seja ℓ o lado do quadrado.
Como $AEFG$ é um quadrado, segue que o triângulo ABC é retângulo. Logo, $A\hat{B}C = 60°.$ Além disso, sabemos que BD é bissetriz de $A\hat{B}C$ e, portanto, $A\hat{B}D \equiv C\hat{B}D = 30°.$ Daí, segue que $B\hat{D}C = 120°.$
Aplicando a Lei dos Senos no triângulo $BCD,$ obtemos

$$\frac{\overline{BC}}{\text{sen}B\hat{D}C} = \frac{\overline{CD}}{\text{sen}C\hat{B}D} \Leftrightarrow \frac{\overline{BC}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \overline{BC} = 6\text{cm.}$$

Assim, no triângulo $ABC,$ temos que

$$\cos A\hat{B}C = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \overline{AB} = 6 \cdot \cos 60° = 3\text{cm.}$$

Por conseguinte, do triângulo $BGF,$ vem

$$\text{tg}A\hat{B}D = \frac{\overline{GF}}{\overline{BG}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\ell}{3 - \ell} \Leftrightarrow \ell = \frac{3(\sqrt{3} - 1)}{2}\text{cm.}$$

Resposta da questão 12:
[B]

Aplicando a Lei dos Cossenos, obtemos

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \cos BAC \Leftrightarrow$$
$$\overline{BC}^2 = 36^2 + 24^2 - 2 \cdot 36 \cdot 24 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow$$
$$\overline{BC}^2 = 1296 + 576 + 864 \Rightarrow$$
$$\overline{BC} = \sqrt{2736} = 12\sqrt{19}\text{km.}$$