Refferencial Vestibulares

NOME:	
CURSO: MATEMÁTICA	DATA: / /2013

ÓVAL PROF. VALDIVINO

LISTA 38 – TRONCOS

QUESTÕES

1. Um recipiente em forma de cone circular reto, com raio da base R e altura h, está completamente cheio com água e óleo. Sabe-se que a superfície de contato entre os líquidos está inicialmente na metade da altura do cone. O recipiente dispõe de uma torneira que permite escoar os líquidos de seu interior, conforme indicado na figura. Se essa torneira for aberta, exatamente até o instante em que toda água e nenhum óleo escoar, a altura do nível do óleo, medida a partir do vértice será

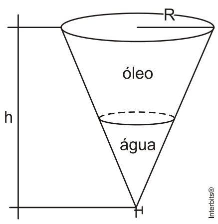
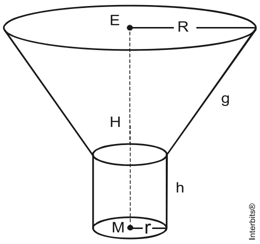


Figura fora de escala

a) $\frac{\sqrt[3]{7}}{2}h$ b) $\frac{\sqrt[3]{7}}{3}h$ c) $\frac{\sqrt[3]{12}}{2}h$ d) $\frac{\sqrt[3]{23}}{2}h$ e) $\frac{\sqrt[3]{23}}{3}h$

2. (Ufmg 2012) Um funil é formado por um tronco de cone e um cilindro circular retos, como representado na figura abaixo
Sabe-se que g = 8 cm, R = 5 cm, r = 1 cm e $h = 4\sqrt{3}$ cm.
Considerando essas informações,



a) Calcule o volume do tronco de cone, ou seja, do corpo do funil.

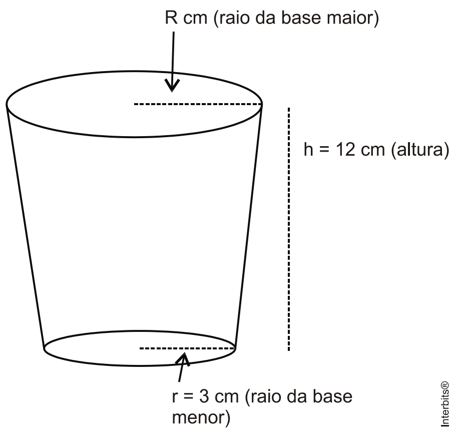
b) Calcule o volume total do funil.

c) Suponha que o funil, inicialmente vazio, começa a receber água a 127 ml/s. Sabendo que a vazão do funil é de 42 ml/s, calcule quantos segundos são necessários para que o funil fique cheio.

3. (Ufg 2012) Pretende-se instalar, em uma via de tráfego intenso, um redutor de velocidade formado por 14 blocos idênticos em forma de tronco de pirâmide. Cada tronco de pirâmide é obtido a partir de uma pirâmide de base retangular após seccioná-la por um plano paralelo à base e distante do vértice $2/3$ da altura da pirâmide. Ao término da instalação, a face superior (base menor) de cada tronco de pirâmide será pintada com tinta amarela. Cada litro de tinta custa R$10,00, sendo suficiente para pintar $10\ m^2$.
Sabendo-se que a área da base maior de cada tronco de pirâmide utilizado na construção do redutor é de $630\ cm^2$, calcule o custo da tinta amarela utilizada.

4. (Udesc 2012) Uma caixa de um perfume tem o formato de um tronco de pirâmide quadrangular regular fechado. Para embrulhá-la, Pedro tirou as seguintes medidas: aresta lateral $5\ cm$ e arestas das bases $8\ cm$ e $2\ cm$. A quantidade total de papel para embrulhar esta caixa, supondo que não haja desperdício e nem sobreposição de material, foi:
a) $88\ cm^2$ b) $168\ cm^2$ c) $80\ cm^2$ d) $68\ cm^2$ e) $148\ cm^2$

5. (Ufu 2012) Considere um balde para colocação de gelo no formato de um tronco de cone circular reto apresentando as medidas indicadas na figura a seguir.



Considerando que esse balde esteja com 25% de sua capacidade ocupada com gelo derretido (água) e, consequentemente, com um volume de água igual a $0{,}097\pi$ litros, qual é o valor (em cm) do raio da base maior R?
a) 8,5 b) 9 c) 8 d) 7,5

6. (Udesc 2012) Um recipiente de uso culinário com 16 cm de altura possui o formato de um tronco de cone reto (conforme ilustra a figura) e está com água até a metade da sua altura.
Sabendo que a geratriz desse recipiente é igual a 20 cm e que o diâmetro de sua base é igual a 4 cm, classifique as proposições abaixo e assinale (V) para verdadeira ou (F) para falsa.

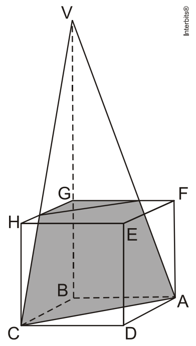
Recipiente culinário

( ) O volume de água no recipiente corresponde à quarta parte da quantidade necessária para enchê-lo totalmente.
( ) Se a água do recipiente for retirada à taxa constante de 28 cm^3 por segundo, então o tempo necessário para esvaziá-lo será superior a 20 segundos.
( ) Para aumentar 4 cm do nível de água no recipiente, é necessário acrescentar mais $364\pi\ cm^3$ de água.

A alternativa correta, de cima para baixo, é:
a) V – F – F
b) F – V – F
c) F – V – V
d) F – F – V
e) V – V – F

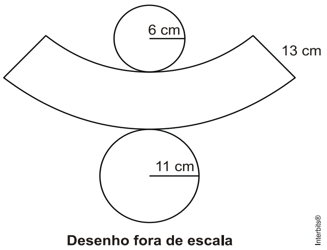
7. (Ufrgs 2011) Na figura abaixo, estão representados um cubo de aresta 3 e uma pirâmide triangular de altura 9. Os pontos A, B e C são vértices da pirâmide e do cubo, e V pertence ao prolongamento de BG.

O volume comum aos dois sólidos é



a) $\frac{15}{2}$.
b) 8.
c) $\frac{17}{2}$.
d) 9.
e) $\frac{19}{2}$.

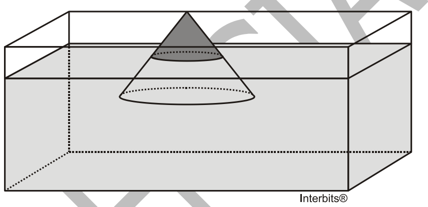
8. (Espcex (Aman) 2011) A figura abaixo representa a planificação de um tronco de cone reto com a indicação das medidas dos raios das circunferências das bases e da geratriz. A medida da altura desse tronco de cone é



a) 13 cm
b) 12 cm
c) 11 cm
d) 10 cm
e) 9 cm

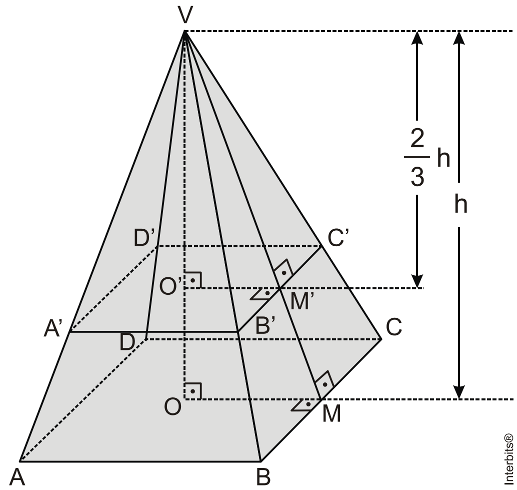
9. (Uerj 2011) Um sólido com a forma de um cone circular reto, constituído de material homogêneo, flutua em um líquido, conforme a ilustração abaixo.

Se todas as geratrizes desse sólido forem divididas ao meio pelo nível do líquido, a razão entre o volume submerso e o volume do sólido será igual a:



a) $\frac{1}{2}$
b) $\frac{3}{4}$
c) $\frac{5}{6}$
d) $\frac{7}{8}$

10. (Uftm 2011) O perímetro da base ABCD de uma pirâmide quadrangular é 36 cm. Seccionando-se essa pirâmide por um plano paralelo à base, obtém-se outra pirâmide quadrangular de base $A'B'C'D'$ cuja altura é igual a $\frac{2}{3}$ da altura da pirâmide inicial, determinando assim um tronco de pirâmide, de bases quadradas e paralelas.



Determine:

a) A área da secção $A'B'C'D'$.
b) A altura e o volume do tronco de pirâmide, sabendo-se que o volume da pirâmide inicial é igual a 324 cm^3.

GABARITO

QUESTÃO 01 [A]
Como a superfície de contato entre os líquidos está inicialmente na metade da altura do cone, segue que a razão entre o volume de água e a capacidade V do recipiente é tal que

$$\frac{v_{H_20}}{V}=\left(\frac{1}{2}\right)^3 \Leftrightarrow v_{H_20}=\frac{V}{8}.$$

Desse modo, o volume de óleo é dado por

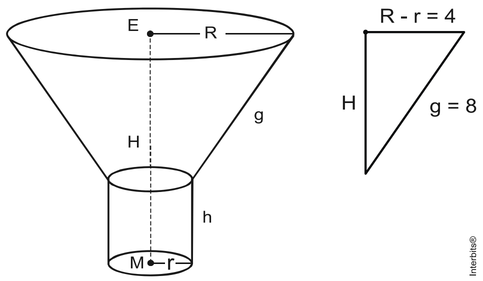
$$V-v_{H_2O}=V-\frac{V}{8}=\frac{7V}{8}.$$

Portanto, quando toda a água e nenhum óleo escoar, a altura x atingida pelo óleo é tal que

$$\frac{\frac{7V}{8}}{V}=\left(\frac{x}{h}\right)^3 \Leftrightarrow \frac{x}{h}=\sqrt[3]{\frac{7}{8}}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\sqrt[3]{7}}{2}h.$$

QUESTÃO 02
a)



$$(8)^2=(4)^2+H^2 \Rightarrow H=4\sqrt{3}\text{ cm}$$

$$V_{Tronco}=\frac{H}{3}\left(\pi R^2+\pi r^2+\pi Rr\right)$$

$$V_{Tronco}=\frac{4\sqrt{3}}{3}\left(\pi(5)^2+\pi(1)^2+\pi(5)(1)\right)$$

$$V_{Tronco}=\frac{124\pi\sqrt{3}}{3}\text{cm}^3$$

b) $V_{Funil}=V_{tronco}+V_{cilindro}$

$$V_{Funil}=\frac{4\sqrt{3}}{3}\left(\pi(5)^2+\pi(1)^2+\pi(5)(1)\right)+\pi(1)^2\left(4\sqrt{3}\right)$$

$$V_{Funil}=\frac{124\pi\sqrt{3}}{3}+4\pi\sqrt{3}=\frac{136\pi\sqrt{3}}{3}\text{cm}^3$$

c) Se o funil recebe 127 ml/s de água e a sua vazão é de 42 ml/s, então: 127 - 42 = 85 ml/s ficam em acumulo por segundo. Para encher o funil, temos:

Tempo para encher o

funil $\Rightarrow \dfrac{V_{Funil}}{85}=\dfrac{\frac{136\pi\sqrt{3}}{3}}{85}\cong 2{,}9\,\text{s}$.

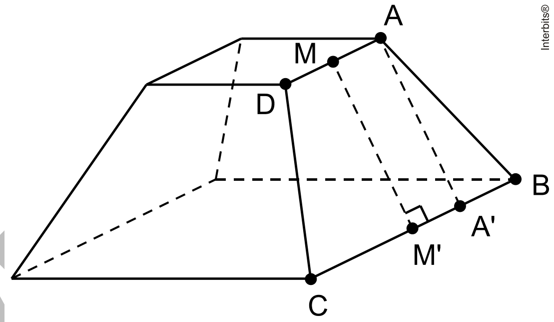
QUESTÃO 03
Seja A a área da base menor de cada tronco de pirâmide. Sabendo que a área base maior de cada tronco de pirâmide mede $630\,\text{cm}^2$, e que a distância do vértice da pirâmide à base menor do tronco é $\frac{2}{3}H$, com H sendo a altura da pirâmide, temos

$$\frac{A}{630}=\left(\frac{\frac{2}{3}H}{H}\right)^2 \Leftrightarrow A=280\,\text{cm}^2.$$

Portanto, como $1\,\text{m}^2$ de área pintada custa R\$ 1,00, o resultado é dado por

$$1\cdot 14\cdot\frac{280}{10000}\cong \text{R\$ }0{,}39.$$

QUESTÃO 04 [E]
Considere a figura.



Sendo M o ponto médio de AD, e M’ o ponto médio de BC, segue que $\overline{A'B}=4-1=3\text{ cm}.$ Logo, como $\overline{AB}=5\,\text{cm},$ vem $\overline{AA'}=4\,\text{cm}.$
Portanto, a quantidade total de papel utilizada para embrulhar a caixa, supondo que não haja desperdício e nem sobreposição de material, é igual a

$$\overline{AD}^2+\overline{BC}^2+4\cdot\frac{\overline{AD}+\overline{BC}}{2}\cdot\overline{AA'}=2^2+8^2+4\cdot\frac{2+8}{2}\cdot 4$$

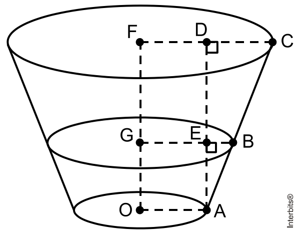
$$=148\,\text{cm}^2.$$

QUESTÃO 05 [C]
Como $0{,}097\pi$ litros correspondem a $25\%=\frac{1}{4}$ da capacidade do balde, temos que a capacidade do balde é igual a $4\cdot 0{,}097\pi\text{ L}=0{,}388\pi\text{ L}=388\pi\,\text{cm}^3.$
Portanto, sabendo que a altura do balde mede $12\,\text{cm}$ e o raio da base menor mede $3\,\text{cm}$, vem

$$388\pi=\frac{12\pi}{3}(R^2+3R+3^2)\Leftrightarrow R^2+3R-88=0$$

$$\Rightarrow R=8\,\text{cm}.$$

QUESTÃO 06 [C]
Considere a figura.



Sabendo que $\overline{AD} = 16\text{cm}$ e que o recipiente está com água até a metade da sua altura, segue que $\overline{AE} = \overline{ED} = 8\text{cm}.$ Além disso, como $\overline{AC} = 20\text{cm}$ e EB é base média do triângulo $ACD,$ vem $\overline{AB} = \overline{BC} = 10\text{cm}.$

Desse modo, $\overline{BE} = 6\text{cm}$ e $\overline{CD} = 12\text{cm}.$

Sabendo ainda que $\overline{AO} = \overline{DF} = 2\text{cm},$ temos que o volume do recipiente é dado por

$$\frac{\pi \cdot \overline{AD}}{3} \cdot (\overline{BG}^2 + \overline{BG} \cdot \overline{AO} + \overline{AO}^2) = \frac{\pi \cdot 16}{3} \cdot (14^2 + 14 \cdot 2 + 2^2)$$
$$= 1216\pi\,\text{cm}^3.$$

Por outro lado, o volume de água no recipiente é

$$\frac{\pi \cdot \overline{AE}}{3} \cdot (\overline{BG}^2 + \overline{BG} \cdot \overline{AO} + \overline{AO}^2) = \frac{\pi \cdot 8}{3} \cdot (8^2 + 8 \cdot 2 + 2^2)$$
$$= 224\pi\,\text{cm}^3.$$

Assim, a quantidade necessária de água para encher totalmente o recipiente é

$$1216\pi - 224\pi = 992\pi\,\text{cm}^3.$$

Portanto,

$$\frac{224\pi}{992\pi} = \frac{7}{31} \neq \frac{1}{4}.$$

Se a água do recipiente for retirada à taxa constante de 28cm^3 por segundo, então o tempo necessário para esvaziá-lo será

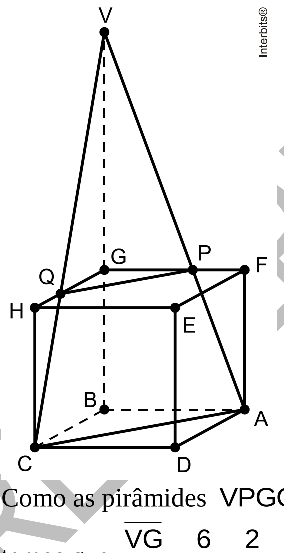
$$\frac{224\pi}{28} \cong \frac{224 \cdot 3}{28} = 24 > 20\text{ s}.$$

Para aumentar 4cm o nível de água no recipiente, é necessário acrescentar mais

$$\frac{\pi \cdot 4}{3} \cdot (11^2 + 11 \cdot 8 + 8^2) = 364\pi\,\text{cm}^3$$ de água.

QUESTÃO 07 [E]

Considere a figura abaixo.



Como as pirâmides $VPGQ$ e $VABC$ são semelhantes, temos que $\dfrac{\overline{VG}}{\overline{VB}} = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3} = k,$

sendo k a razão de semelhança.

Desse modo, $\dfrac{[VPGQ]}{[VABC]} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^3 \Leftrightarrow [VPGQ] = \dfrac{8}{27} \cdot [VABC].$

O volume da pirâmide $VABC$ é dado por

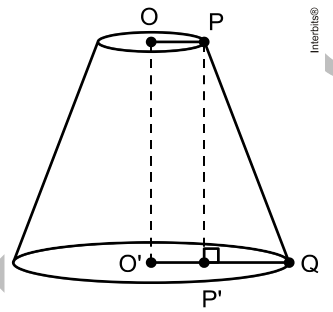
$$[VABC] = \frac{1}{3} \cdot \frac{\overline{AB} \cdot \overline{BC}}{2} \cdot \overline{VB}$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{3 \cdot 3}{2} \cdot 9$$
$$= \frac{27}{2}.$$

Portanto, o volume pedido é

$$[VABC] - [VPGQ] = [VABC] - \frac{8}{27} \cdot [VABC]$$
$$= \frac{19}{27} \cdot [VABC]$$
$$= \frac{19}{27} \cdot \frac{27}{2}$$
$$= \frac{19}{2}.$$

QUESTÃO 08 [B]

Considere a figura abaixo.



Sabemos que $\overline{OP} = 6\text{cm},$ $\overline{O'Q} = 11\text{cm}$ e $\overline{PQ} = 13\text{cm}.$

Logo, como $\overline{OP} = \overline{O'P'},$ segue que $\overline{P'Q} = \overline{O'Q} - \overline{O'P'} = 11 - 6 = 5\text{cm}.$

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo $P'PQ,$ encontramos

$$\overline{PP'}^2 = \overline{PQ}^2 - \overline{P'Q}^2 \Rightarrow \overline{PP'} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12\text{cm},$$

que é a altura procurada.

Resposta:QUESTÃO 09 [D]

Seja g uma geratriz do cone emerso e G uma geratriz do sólido. Segue que

$$\frac{g}{G} = \frac{1}{2} = k,$$

com k sendo a constante de proporcionalidade.

Assim, se v é o volume emerso e V é o volume do sólido, temos

$$\frac{v}{V} = k^3 \Rightarrow \frac{v}{V} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow v = \frac{V}{8}.$$

Seja V_s o volume submerso.

$$V_s = V - v = V - \frac{V}{8} = \frac{7V}{8}.$$

Portanto, a razão pedida é

$$\frac{V_s}{V} = \frac{\frac{7V}{8}}{V} = \frac{7}{8}.$$

Resposta:QUESTÃO 10

a) Seja ℓ a aresta da base ABCD. Como o perímetro da base ABCD mede 36 cm, segue que

$$4\ell = 36 \Leftrightarrow \ell = 9\text{ m}.$$

Logo, a área da base ABCD é dada por:

$$(ABCD) = \ell^2 = 9^2 = 81\,\text{cm}^2.$$

Portanto, como as pirâmides VABCD e VA'B'C'D' são semelhantes, temos que:

$$\frac{(A'B'C'D')}{(ABCD)} = \left(\frac{\frac{2}{3}h}{h}\right)^2 \Leftrightarrow (A'B'C'D') = 81 \cdot \frac{4}{9} = 36\text{ cm}^2.$$

b) Se o volume da pirâmide VABCD é igual a $324\,\text{cm}^3$, então:

$$324 = \frac{1}{3} \cdot 81 \cdot h \Leftrightarrow h = 12\text{ cm}.$$

Desse modo, a altura do tronco de pirâmide é:

$$h - \frac{2}{3}h = \frac{1}{3}h = \frac{1}{3} \cdot 12 = 4\,\text{cm}.$$

Além disso,

$$\frac{[VA'B'C'D']}{[VABCD]} = \left(\frac{\frac{2}{3}h}{h}\right)^3 \Leftrightarrow [VA'B'C'D'] = \frac{8}{27}[VABCD].$$

Portanto, o volume do tronco é dado por:

$$\begin{aligned}
[VABCD] - [VA'B'C'D'] &= [VABCD] - \frac{8}{27}[VABCD] \\
&= \frac{19}{27}[VABCD] \\
&= \frac{19}{27} \cdot 324 \\
&= 228\,\text{cm}^3.
\end{aligned}$$