

LISTA 20 – EXPONENCIAIS

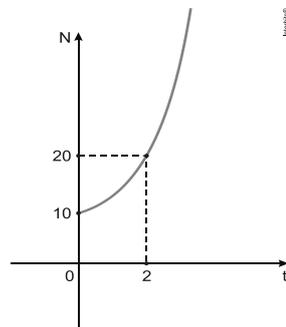
1. (Ufrn 2013) A pedido do seu orientador, um bolsista de um laboratório de biologia construiu o gráfico a seguir a partir dos dados obtidos no monitoramento do crescimento de uma cultura de micro-organismos.

Analisando o gráfico, o bolsista informou ao orientador que a cultura crescia segundo o modelo matemático, $N = k \cdot 2^{at}$, com t em horas e N em milhares de micro-organismos.

Para constatar que o modelo matemático apresentado pelo bolsista estava correto, o orientador coletou novos dados com $t = 4$ horas e $t = 8$ horas.

Para que o modelo construído pelo bolsista esteja correto, nesse período, o orientador deve ter obtido um aumento na quantidade de micro-organismos de

- a) 80.000. b) 160.000. c) 40.000. d) 120.000.



2. (Espcex (Aman) 2013) Um jogo pedagógico foi desenvolvido com as seguintes regras:

- Os alunos iniciam a primeira rodada com 256 pontos;
- Faz-se uma pergunta a um aluno. Se acertar, ele ganha a metade dos pontos que tem. Se errar, perde metade dos pontos que tem;
- Ao final de 8 rodadas, cada aluno subtrai dos pontos que tem os 256 iniciais, para ver se “lucrou” ou “ficou devendo”.

O desempenho de um aluno que, ao final dessas oito rodadas, ficou devendo 13 pontos foi de

- a) 6 acertos e 2 erros. b) 5 acertos e 3 erros.
c) 4 acertos e 4 erros. d) 3 acertos e 5 erros.
e) 2 acertos e 6 erros.

3. (Fuvest 2013) Quando se divide o Produto Interno Bruto (PIB) de um país pela sua população, obtém-se a renda *per capita* desse país. Suponha que a população de um país cresça à taxa constante de 2% ao ano. Para que sua renda *per capita* dobre em 20 anos, o PIB deve crescer anualmente à taxa constante de, aproximadamente,

Dado: $20\sqrt{2} \cong 1,035$.

- a) 4,2% b) 5,2% c) 6,4% d) 7,5% e) 8,9%

4. (G1 - cftmg 2013) O produto das raízes da equação exponencial $3 \cdot 9^x - 10 \cdot 3^x + 3 = 0$ é igual a

- a) -2. b) -1. c) 0. d) 1.

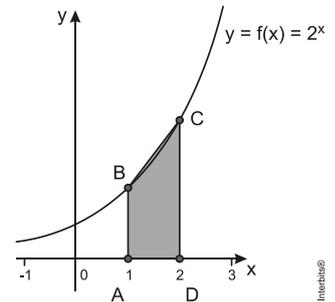
5. (Espcex (Aman) 2012) Na pesquisa e desenvolvimento de uma nova linha de defensivos agrícolas, constatou-se que a ação do produto sobre a população de insetos em uma lavoura pode ser descrita pela expressão $N(t) = N_0 \cdot 2^{kt}$, sendo N_0 a população no início do tratamento, $N(t)$, a população após t dias de tratamento e k uma constante, que descreve a eficácia do produto. Dados de campo mostraram que, após dez dias de aplicação, a população havia sido reduzida à quarta parte da população inicial. Com estes dados, podemos afirmar que o valor da constante de eficácia deste produto é igual a

- a) 5^{-1} b) -5^{-1} c) 10 d) 10^{-1} e) -10^{-1}

6. (Ufjf 2012) Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida por $f(x) = 2^x$. Na figura abaixo está representado, no plano cartesiano, o gráfico de f e um trapézio $ABCD$, retângulo nos vértices A e D e cujos vértices B e C estão sobre o gráfico de f .

A medida da área do trapézio $ABCD$ é igual a:

- a) 2 b) $\frac{8}{3}$ c) 3 d) 4 e) 6



7. (Uftm 2012) A população P de um país no ano t pode ser estimada através da função $P(t) = m \cdot n^{t-2011}$, para $n \neq 0$. Sabendo-se que a população atual desse país é de 15,3 milhões de habitantes, e que sua taxa anual de crescimento é de 2%, então, $\frac{m}{n}$ é igual a

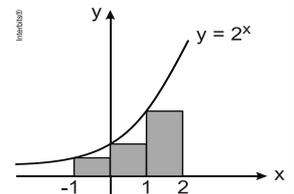
- a) $1,2 \times 10^6$. b) $1,5 \times 10^6$. c) $1,2 \times 10^7$. d) $1,5 \times 10^7$.
e) $1,2 \times 10^8$.

8. (Udesc 2012) Se x é solução da equação $3^{4x-1} + 9^x = 6$, então x^x é igual a:

- a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{2}$ d) 1 e) 27

9. (Espm 2012) A figura abaixo mostra o gráfico da função $f(x) = 2^x$. A área da região sombreada, formada por retângulos, é igual a:

- a) 3,0 b) 3,5 c) 4,0
d) 4,5 e) 5,0



10. (Pucrj 2012) A equação $2^{x^2-14} = \frac{1}{1024}$ tem duas

soluções reais. A soma das duas soluções é:

- a) -5 b) 0 c) 2 d) 14 e) 1024

11. (Insper 2012) Considerando x uma variável real positiva, a equação $x^{x^2-6x+9} = x$ possui três raízes, que nomearemos a , b e c . Nessas condições, o valor da expressão $a^2 + b^2 + c^2$ é

- a) 20. b) 21. c) 27. d) 34. e) 35.

12. (Ufsj 2012) A interseção dos gráficos das funções $h(x) = 2^x + 1$ e $s(x) = 2^{x+1}$ é o ponto que tem a soma de suas coordenadas igual a

- a) 2 e pertence à reta $y = x + 2$
b) 1 e pertence à reta $y = x + 1$
c) 2 e pertence à reta $y = x - 2$
d) 1 e pertence à reta $y = x - 1$

LISTA 20: EXPONENCIAS

Gabarito:

Resposta da questão 1: [D]

Do gráfico, temos

$$(2, 20) \Leftrightarrow 20 = 10 \cdot 2^{a \cdot 2}$$

$$(0, 10) \Leftrightarrow 10 = k \cdot 2^{a \cdot 0} \Leftrightarrow k = 10 \quad e$$

$$\Leftrightarrow 2 = 2^{2a}$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$$

Logo, $N(t) = 10 \cdot 2^{\frac{t}{2}}$ e, portanto, se o modelo estiver correto, o aumento na quantidade de micro-organismos entre $t = 4$ e $t = 8$ horas deve ter sido de $N(8) - N(4) = 160 - 40 = 120.000$.

Resposta da questão 2: [B]

Seja n o número de acertos do aluno.

A cada acerto, o aluno fica com seus pontos multiplicados por $\frac{3}{2}$; e a cada erro, fica com seus pontos multiplicados por $\frac{1}{2}$. Desse modo, sabendo que o aluno ficou devendo

13 pontos, temos que

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{8-n} \cdot 256 = 243 \Leftrightarrow 3^n = 3^5 \Leftrightarrow n = 5.$$

Portanto, o aluno acertou 5 perguntas e errou $8 - 5 = 3$.

Resposta da questão 3: [B]

Sejam r_0 , PIB_0 e P_0 , respectivamente, a renda per capita, o PIB e a população do país hoje. Assim, o PIB e a população, daqui a 20 anos, são dados, respectivamente, por

$$(1+i)^{20} \cdot PIB_0 \quad e \quad (1,02)^{20} \cdot P_0,$$

em que i é a taxa pedida.

Portanto,

$$r = 2 \cdot r_0 \Leftrightarrow \frac{(1+i)^{20} \cdot PIB_0}{(1,02)^{20} \cdot P_0} = 2 \cdot \frac{PIB_0}{P_0}$$

$$\Leftrightarrow (1+i)^{20} = 2 \cdot (1,02)^{20}$$

$$\Rightarrow i = \sqrt[20]{2 \cdot (1,02)^{20}} - 1$$

$$\Rightarrow i = 1,02 \cdot \sqrt[20]{2} - 1$$

$$\Rightarrow i \cong 1,02 \cdot 1,035 - 1$$

$$\Rightarrow i \cong 5,6\%$$

Resposta da questão 4: [B]

$$3 \cdot 9^x - 10 \cdot 3^x + 3 = 0 \Rightarrow 3 \cdot (3^x)^2 - 10 \cdot 3^x + 3 = 0 \Rightarrow 3^x = \frac{10 \pm 8}{6} \Rightarrow 3^x = 3 \quad \text{ou} \quad 3^x = 3^{-1} \Leftrightarrow$$

$$x = 1 \quad \text{ou} \quad x = -1$$

Logo, o produto das raízes será dado por $1 \cdot (-1) = -1$.

Resposta da questão 5: [B]

De acordo com as informações, vem

$$\frac{N_0}{4} = N_0 \cdot 2^{k \cdot 10} \Leftrightarrow 2^{10k} = 2^{-2} \Leftrightarrow k = -5^{-1}.$$

Resposta da questão 6: [C]

A área do trapézio ABCD é dada por:

$$\frac{f(2) + f(1)}{2} \cdot (2 - 1) = \frac{2^2 + 2^1}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ u.a.}$$

Resposta da questão 7: [D]

Na lei $P(t) = m \cdot n^{t-2011}$, temos que m é a população inicial (para $t = 2011$) e $n = 1+i$ é o fator de crescimento, sendo i a taxa de crescimento na forma

decimal. Desse modo, $m = 15,3 \cdot 10^6$ e

$$n = 1 + 0,02 = 1,02.$$

Portanto, o resultado pedido é:

$$\frac{15,3 \cdot 10^6}{1,02} = 15 \cdot 10^6 = 1,5 \cdot 10^7.$$

Resposta da questão 8: [A]

Resolvendo a equação, obtemos

$$3^{4x-1} + 9^x = 6 \Leftrightarrow \frac{3^{4x}}{3} + 3^{2x} = 6$$

$$\Leftrightarrow 3^{4x} + 3 \cdot 3^{2x} = 18$$

$$\Leftrightarrow \left(3^{2x} + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{81}{4}$$

$$\Leftrightarrow 3^{2x} = \pm \frac{9}{2} - \frac{3}{2}$$

$$\left| \begin{array}{l} 3^{2x} = 3 \\ \text{ou} \\ 3^{2x} = -6 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Portanto,

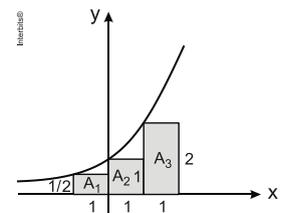
$$x^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Resposta da questão 9: [B]

$$A = A_1 + A_2 + A_3$$

$$A = 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2$$

$$A = 3,5$$



Resposta da questão 10: [B]

Reduzindo à mesma base e igualando os expoentes, obtemos

$$2^{x^2-14} = \frac{1}{1024} \Leftrightarrow 2^{x^2-14} = 2^{-10}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 14 = -10$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4 = 0.$$

Portanto, das relações entre coeficientes e raízes, segue

que a soma das soluções da equação é $-\frac{0}{1} = 0$.

Resposta da questão 11: [B]

$$x^2 - 6x + 9 = x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 0 \end{cases} \quad (\text{não convém})$$

$$x^2 - 6x + 9 = 1 \Leftrightarrow x = 2 \quad \text{ou} \quad x = 4$$

Portanto, $1^2 + 2^2 + 4^2 = 21$.

Resposta da questão 12: [A]

Igualando as funções, temos:

$$2^x + 1 = 2^{x+1}$$

$$2^x + 1 = 2^x \cdot 2$$

$$2^x = 1$$

$$x = 0 \quad e \quad y = h(0) = 2^0 + 1 = 2.$$

Portanto a intersecção das funções é o ponto $(0,2)$.

Então a soma de suas coordenadas é 2 e este ponto pertence à reta $y = x + 2$.