NOME:	
CURSO: MATEMÁTICA	DATA: / /2013

PROF. VALDIVINO

LISTA 25 – Progressão geométrica

1**.** (Uerj 2014) Um feirante vende ovos brancos e vermelhos. Em janeiro de um determinado ano, do total de vendas realizadas, 50% foram de ovos brancos e os outros 50% de ovos vermelhos. Nos meses seguintes, o feirante constatou que, a cada mês, as vendas de ovos brancos reduziram-se 10% e as de ovos vermelhos aumentaram $20\%,$ sempre em relação ao mês anterior.

Ao final do mês de março desse mesmo ano, o percentual de vendas de ovos vermelhos, em relação ao número total de ovos vendidos em março, foi igual a:

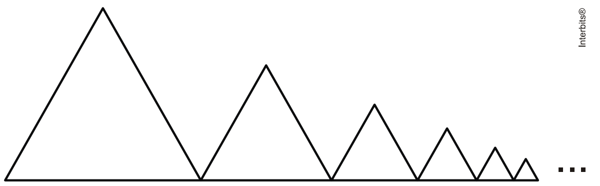
a) 64% b) 68% c) 72% d) 75%

2**.** (Uerj 2014) Em um recipiente com a forma de um paralelepípedo retângulo com $40\,\text{cm}$ de comprimento, $25\,\text{cm}$ de largura e $20\,\text{cm}$ de altura, foram depositadas, em etapas, pequenas esferas, cada uma com volume igual a $0{,}5\,\text{cm}^3.$ Na primeira etapa, depositou-se uma esfera; na segunda, duas; na terceira, quatro; e assim sucessivamente, dobrando-se o número de esferas a cada etapa. Admita que, quando o recipiente está cheio, o espaço vazio entre as esferas é desprezível.

Considerando $2^{10} \cong 1000,$ o menor número de etapas necessárias para que o volume total de esferas seja maior do que o volume do recipiente é:

a) 15 b) 16 c) 17 d) 18

3**.** (Ufrgs 2013) A sequência representada, na figura abaixo, é formada por infinitos triângulos equiláteros. O lado do primeiro triângulo mede $1,$ e a medida do lado de cada um dos outros triângulos é $\dfrac{2}{3}$ da medida do lado do triângulo imediatamente anterior.



A soma dos perímetros dos triângulos dessa sequência infinita é

a) $9.$ b) $12.$ c) $15.$ d) $18.$ e) $21.$

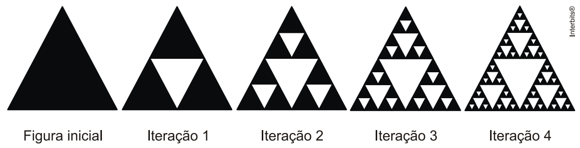
4**.** (Uern 2012) Seja a sequência $(x,\ 1,\ y,\ y+12,\ \ldots)$ uma progressão geométrica, tal que a soma do quarto e quinto termos é igual a 80. A diferença entre os dois primeiros termos dessa sequência é

a) $\dfrac{2}{3}.$ b) $\dfrac{2}{5}.$ c) $\dfrac{1}{2}.$ d) $\dfrac{3}{4}.$

5**.** (Ufu 2012) Os "fractais" são criados a partir de funções matemáticas cujos cálculos são transformados em imagens. Geometricamente, criam-se fractais fazendo-se divisões sucessivas de uma figura em partes semelhantes à figura inicial. Abaixo destacamos o *Triângulo de Sierpinski*, obtido através do seguinte processo recursivo:

— Considere um triângulo equilátero de $1\,\text{cm}^2$ de área, conforme a Figura Inicial. Na primeira iteração, divida-o em quatro triângulos equiláteros idênticos e retire o triângulo central, conforme figura da Iteração 1 (note que os três triângulos restantes em preto na Iteração 1 são semelhantes ao triângulo inicial).

— Na segunda iteração, repita o processo em cada um dos três triângulos pretos restantes da primeira iteração. E assim por diante para as demais iterações. Seguindo esse processo indefinidamente, obtemos o chamado *Triângulo de Sierpinski.*

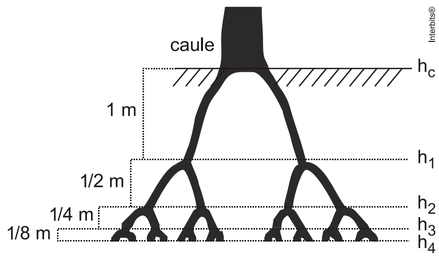


Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Sierpinsky_triangle_%28evolution%29.png>. Acesso em: 2 jul. 2012.

Considerando um triângulo preto em cada iteração, da iteração 1 até a iteração N, e sabendo que o produto dos valores numéricos das áreas desses triângulos é igual a $\dfrac{1}{2^{240}},$ então N é

a) é um número primo. b) é múltiplo de 2.
c) é um quadrado perfeito. d) é divisível por 3.

6**.** (Uel 2012) A figura a seguir representa um modelo plano do desenvolvimento vertical da raiz de uma planta do mangue. A partir do caule, surgem duas ramificações da raiz e em cada uma delas surgem mais duas ramificações e, assim, sucessivamente. O comprimento vertical de uma ramificação, dado pela distância vertical reta do início ao fim da mesma, é sempre a metade do comprimento da ramificação anterior.



Modelo de raiz de planta de mangue

Sabendo que o comprimento vertical da primeira ramificação é de $h_1 = 1\,\text{m},$ qual o comprimento vertical total da raiz, em metros, até h_{10}?

a) $\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2^{10}}\right)$ b) $\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2^{9}}\right)$

c) $2\left(1-\dfrac{1}{2^{10}}\right)$ d) $2\left(1-\dfrac{1}{10^{10}}\right)$

e) $2\left(1-\dfrac{1}{2^{9}}\right)$

valdivinomat@yahoo.com.br – Rua 13 de junho, 1882 - 3043-0109

7. (Unicamp 2012) Para construir uma curva “floco de neve”, divide-se um segmento de reta (Figura 1) em três partes iguais. Em seguida, o segmento central sofre uma rotação de 60º, e acrescenta-se um novo segmento de mesmo comprimento dos demais, como o que aparece tracejado na Figura 2. Nas etapas seguintes, o mesmo procedimento é aplicado a cada segmento da linha poligonal, como está ilustrado nas Figuras 3 e 4.

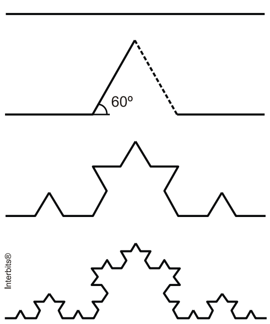


Fig. 1
Fig. 2
Fig. 3
Fig. 4

Se o segmento inicial mede 1 cm, o comprimento da curva obtida na sexta figura é igual a

a) $\left(\dfrac{6!}{4!3!}\right)\text{cm}$ b) $\left(\dfrac{5!}{4!3!}\right)\text{cm}$

c) $\left(\dfrac{4}{3}\right)^5 \text{cm}$ d) $\left(\dfrac{4}{3}\right)^6 \text{cm}$

8. (Espm 2012) A sequência (x, 4, y, z) é uma progressão geométrica e (x, y, z – 2) é uma progressão aritmética, com **y < 0**. O valor de z é:

a) 2 b) $2\sqrt{2}$ c) 16 d) 8 e) $4\sqrt{2}$

9. (Uespi 2012) Em outubro de 2011, o preço do dólar aumentou 18%. Se admitirmos o mesmo aumento, mensal e cumulativo, nos meses subsequentes, em quantos meses, a partir de outubro, o preço do dólar ficará multiplicado por doze? **Dado**: use a aproximação $12 \cong 1{,}18^{15}$.

a) 12 b) 13 c) 14 d) 15 e) 16

10. (Ulbra 2012) João percebeu que, ao abrir a torneira ligada ao reservatório de água, por 5 minutos, o volume diminuía para 1/5 da sua capacidade remanescente. Depois de 20 minutos com a torneira aberta, o volume do reservatório era de 0,12 m^3. Qual é a capacidade total da caixa d’água?

a) 15 000 litros. b) 50 000 litros.
c) 30 000 litros. d) 75 000 litros.
e) 60 000 litros.

Gabarito:

Resposta da questão 1: [A]

Seja $2q$ a quantidade total de ovos vendidos em janeiro. Assim, o resultado pedido é dado por

$$\frac{(1{,}2)^2 \cdot q}{(1{,}2)^2 \cdot q + (0{,}9)^2 \cdot q} \cdot 100\% = \frac{1{,}44}{2{,}25} \cdot 100\%$$
$$= 64\%.$$

Resposta da questão 2: [B]

Como o número de esferas acrescentadas a cada etapa cresce segundo uma progressão geométrica de razão $2,$ segue que, após n etapas, o volume ocupado pelas esferas é igual a $0{,}5 \cdot 1 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1}.$ Daí, o número de etapas necessárias para que o volume total de esferas seja maior do que o volume do recipiente é tal que

$$0{,}5 \cdot 1 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1} > 40 \cdot 25 \cdot 20 \Leftrightarrow 2^n > 40 \cdot 1000 + 1$$
$$\Rightarrow 2^n > 40 \cdot 2^{10} + 1.$$

Como $2^5 < 40 < 2^6,$ segue que $n = 16.$

Resposta da questão 3: [A]

A soma pedida é igual a

$$3 \cdot \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \ldots\right) = 3 \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 9.$$

Resposta da questão 4: [D]

Seja $(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots) = (x,\ 1,\ y,\ y + 12,\ \ldots).$

A razão dessa progressão geométrica é dada por $\frac{a_3}{a_2} = \frac{y}{1} = y.$ Daí, como a soma do quarto e quinto termos é igual a $80,$ vem que

$$a_4 + a_5 = 80 \Leftrightarrow y + 12 + (y + 12) \cdot y = 80$$
$$\Leftrightarrow y^2 + 13y - 68 = 0$$
$$\Leftrightarrow y = -17 \text{ ou } y = 4.$$

Mas y não pode ser $-17,$ já que $(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots) = (x,\ 1,\ -17,\ -5,\ \ldots)$ não é uma progressão geométrica. Então, $y = 4$ e $x = \frac{1}{y} = \frac{1}{4}.$

Portanto, o módulo da diferença entre os dois primeiros termos da sequência é

$$|\,x - 1| = \left|\frac{1}{4} - 1\right| = \frac{3}{4}.$$

Resposta da questão 5: [D]

A área de cada triângulo preto decresce segundo uma progressão geométrica, cujo primeiro termo é $\frac{1}{4}$ e cuja razão é $\frac{1}{4}.$

Sabendo que o produto dos valores numéricos das áreas dos triângulos, da iteração 1 até a iteração $n,$ é igual a $\frac{1}{2^{240}},$ vem

$$\left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{n\cdot(n-1)}{2}} = \frac{1}{2^{240}} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n^2+n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{240}$$
$$\Leftrightarrow n^2 + n = 240$$
$$\Rightarrow n = 15.$$

Portanto, como $n = 15 = 3 \cdot 5,$ segue que n é divisível por $3.$

Resposta da questão 6: [C]

Os comprimentos das ramificações, em metros, constituem a progressão geométrica

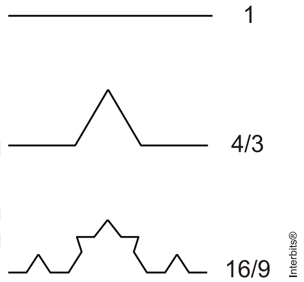
$$\left(1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2^2},\ \ldots\right),$$

cujo primeiro termo é 1 e a razão vale $\frac{1}{2}.$

Queremos calcular a soma dos dez primeiros termos dessa sequência, ou seja,

$$S_{10} = a_1 \cdot \frac{1 - q^{10}}{1 - q} = 1 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1 - \frac{1}{2^{10}}}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{10}}\right).$$

Resposta da questão 7: [C]



Os comprimentos das figuras formam uma P.G. de razão 4/3. Logo, o comprimento da sexta figura será dado por:

$$a_6 = 1.\left(\frac{4}{3}\right)^5 = \left(\frac{4}{3}\right)^5.$$

Resposta da questão 8: [A]

Na progressão geométrica, temos;

$x.y = 4^2$

$y = 16/x$ (I)

$4y = x.z$

$z = 4y/x$

$z = 64/x^2$ (II)

Na progressão aritmética, temos:

$2y = x + z - 2$(III)

Substituindo (I) e (II) em (III), temos:

$$2.\frac{16}{x} = x + \frac{64}{x^2} - 2$$

$$32x = x^3 + 64 - 2.x^2$$

$$x^3 - 2x^2 - 32x + 64 = 0$$

$$x^2(x - 2) - 32.(x - 2) = 0$$

$$(x - 2).(x^2 - 32) = 0$$

$$x = 2 \text{ ou } x = \pm 4\sqrt{2}$$

Como y < o, temos:

$x = -4\sqrt{2}$ e

$$z = \frac{64}{(-4\sqrt{2})^2} = 2.$$

Resposta da questão 9: [D]
Seja p o preço do dólar, em outubro de 2011, antes do aumento.
Queremos calcular após quantos meses o preço do dólar será $12p.$
Como o preço do dólar n meses após outubro é dado por $p \cdot (1{,}18)^n,$ temos que

$$\begin{aligned} p \cdot (1{,}18)^n = 12p &\Rightarrow (1{,}18)^n = 12 \\ &\Rightarrow (1{,}18)^n = 1{,}18^{15} \\ &\Rightarrow n \cong 15. \end{aligned}$$

Resposta da questão 10: [D]
Seja V a capacidade da caixa d'água.
Supondo que o reservatório encontra-se inicialmente cheio, segue que:

$$\left(\frac{1}{5}\right)^4 \cdot V = 0{,}12 \Leftrightarrow V = 625 \cdot 0{,}12 = 75\ m^3 = 75.000\ L.$$