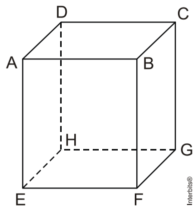
LISTA 34 – PRISMAS E CILINDROS

QUESTÕES

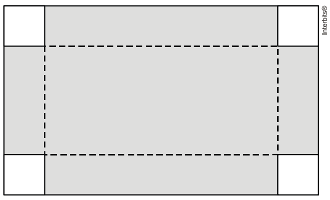
1. (Unicamp 2013) Numa piscina em formato de paralelepípedo, as medidas das arestas estão em progressão geométrica de razão $q > 1$.
a) Determine o quociente entre o perímetro da face de maior área e o perímetro da face de menor área.
b) Calcule o volume dessa piscina, considerando $q = 2$ e a área total do paralelepípedo igual a 252 m^2.

2. ABCDEFG é um cubo de aresta 4 cm. Unindo-se os pontos médios das arestas $\overline{AD}$, $\overline{AE}$, $\overline{EF}$, $\overline{FG}$, $\overline{CG}$ e $\overline{CD}$, obtém-se um polígono cujo perímetro, em centímetros, é igual a

a) $6\sqrt{2}$.
b) $9\sqrt{2}$.
c) $12\sqrt{2}$.
d) $15\sqrt{2}$.
e) $18\sqrt{2}$.



3. (Pucrj 2013) De uma folha de papelão de lados de medidas 23 e 14 foram retirados, dos quatro cantos, quadrados de lado de medida 3 para construir uma caixa (sem tampa) dobrando o papelão nas linhas pontilhadas.

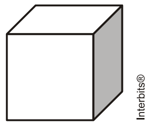


a) Determine o perímetro da folha de papelão após a retirada dos quatro cantos.
b) Determine a área da folha de papelão após a retirada dos quatro cantos.
c) Determine o volume da caixa formada.

4. (Ufsm 2013) Os produtos de plástico são muito úteis na nossa vida, porém causam muitos danos ao meio ambiente. Algumas empresas começaram a investir em alternativas para evitar a poluição causada pelo plástico. Uma dessas alternativas é a utilização do bioplástico na fabricação de embalagens, garrafas, componentes de celulares e autopeças.
Uma embalagem produzida com bioplástico tem a forma de um prisma hexagonal regular com 10 cm de aresta da base e 6 cm de altura. Qual é o volume, em cm^3, dessa embalagem?

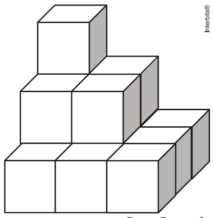
a) $150\sqrt{3}$.
b) 1.500.
c) $900\sqrt{3}$.
d) 1.800.
e) $1800\sqrt{3}$.

5. (Upe 2013) Para pintar completamente o cubo representado abaixo, são necessários 300 mililitros de tinta.

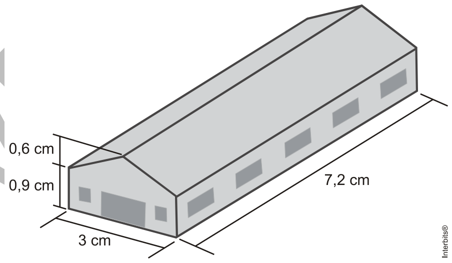


Mantendo o mesmo rendimento de pintura, quantos litros seriam necessários para pintar completamente a peça representada abaixo, formada por 13 desses cubos, sabendo-se que não há cubos escondidos?

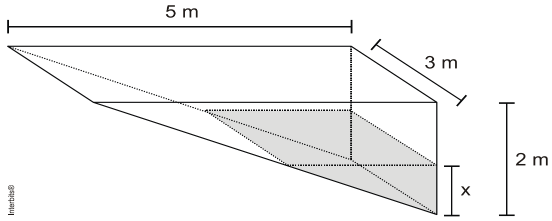
a) 0,7 litro
b) 1,9 litros
c) 2,1 litros
d) 3,0 litros
e) 4,2 litros



6. (Fgv 2013) A figura mostra a maquete do depósito a ser construído. A escala é 1: 500, ou seja, 1cm, na representação, corresponde a 500 cm na realidade.
Qual será a capacidade, em metros cúbicos, do depósito?

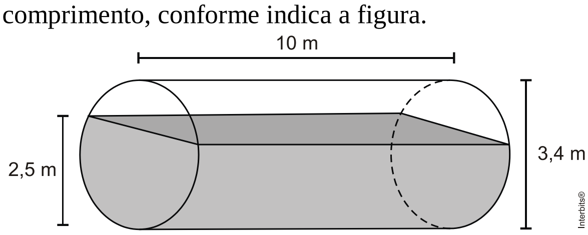


7. (Ufpr 2013) Um tanque possui a forma de um prisma reto, com as dimensões indicadas pela figura. Com base nisso, faça o que se pede:



a) Quando estiver completamente cheio, quantos litros esse tanque comportará?
b) Obtenha uma função que expresse o volume V de água no tanque como função da altura x.

8. (Ufpr 2013) Um reservatório possui internamente o formato de um cilindro com 3,4 m de diâmetro e 10 m de comprimento, conforme indica a figura.

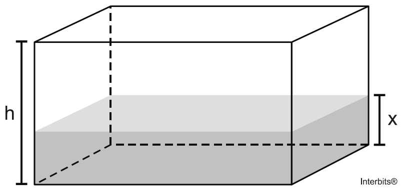


a) Qual o volume total que esse reservatório comporta?
b) Num certo momento, a altura do líquido no interior do reservatório é de 2,5 m, como indica a figura. Qual a área da superfície do líquido exposta ao ar dentro do reservatório?

9. (Ueg 2013) Uma coluna de sustentação de determinada ponte é um cilindro circular reto. Sabendo-se que na maquete que representa essa ponte, construída na escala $1:100$, a base da coluna possui 2 cm de diâmetro e 9 cm de altura, o volume, em m^3 de concreto utilizado na coluna, é:
(Use $\pi = 3{,}14$)
a) 2,826 b) 28,26 c) 282,6 d) 2826

10. (Espm 2013) Um cilindro circular reto de raio da base igual a 4 cm contém água até uma certa altura. Um objeto é colocado no seu interior, ficando totalmente submerso. Se o nível da água no cilindro subiu 3 cm, podemos afirmar que o volume desse objeto é de, aproximadamente:
a) 174 cm^3 b) 146 cm^3 c) 162 cm^3 d) 183 cm^3
e) 151 cm^3

11. (Uftm 2012) A altura, em centímetros, do nível da água armazenada em um reservatório com a forma de um prisma reto de base retangular é igual a x, conforme mostra a figura.

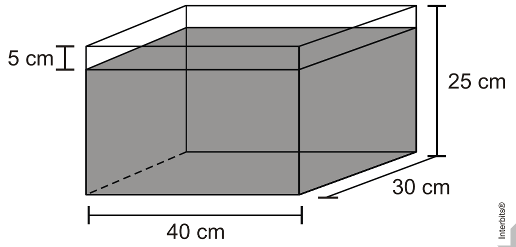


Usando todo esse volume de água armazenado, pode-se encher completamente uma quantidade exata de recipientes com capacidade de 20 litros cada, ou uma quantidade exata de recipientes com capacidade de 50 litros cada. Se $x = \frac{h}{3}$, onde h é a altura do reservatório, então a menor capacidade, em litros, desse reservatório cheio é
a) 200. b) 300. c) 400. d) 500. e) 600.

12. Em uma gráfica, há uma pilha de papel no formato A4 com 1 m. O papel A4 tem a forma retangular com 21 cm de largura por 30 cm de comprimento. Assim sendo, o volume ocupado pela pilha de papel é de
a) 630 cm^3. b) 51 cm^3. c) 151 cm^3.
d) 51 000 cm^3. e) 63 000 cm^3.

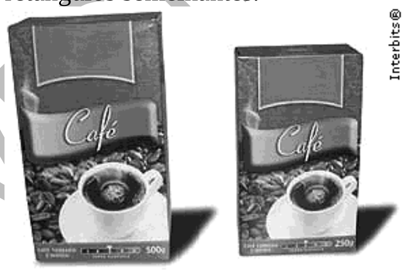
13. Lúcia pediu a seu pai, o Sr. Paulo, para montar um aquário em seu quarto. Os dois foram a uma loja especializada e compraram os equipamentos necessários. As dimensões do aquário eram: 1,2 metros de largura, 0,6 metros de comprimento e 0,65 metros de altura. Depois que o aquário estava com água, o Sr. Paulo percebeu que tinha se esquecido de colocar um castelo de pedra para enfeite. Com cuidado, ele colocou o castelo dentro do aquário e percebeu que o nível da água subiu 15 cm. Lembrando-se de suas aulas de matemática, ele resolveu calcular o volume do castelo. Depois de efetuados os cálculos, ele percebeu que o volume do castelo era, em dm^3,:
a) 1,08
b) 10,8
c) 108
d) 1.080
e) 10.800

14. (Enem 2012) Alguns objetos, durante a sua fabricação, necessitam passar por um processo de resfriamento. Para que isso ocorra, uma fábrica utiliza um tanque de resfriamento, como mostrado na figura.



O que aconteceria com o nível da água se colocássemos no tanque um objeto cujo volume fosse de 2 400 cm^3?
a) O nível subiria 0,2 cm, fazendo a água ficar com 20,2 cm de altura.
b) O nível subiria 1 cm, fazendo a água ficar com 21 cm de altura.
c) O nível subiria 2 cm, fazendo a água ficar com 22 cm de altura.
d) O nível subiria 8 cm, fazendo a água transbordar.
e) O nível subiria 20 cm, fazendo a água transbordar.

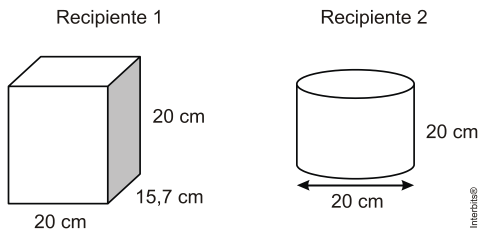
15. (Uerj 2012) As figuras a seguir mostram dois pacotes de café em pó que têm a forma de paralelepípedos retângulos semelhantes.



Se o volume do pacote maior é o dobro do volume do menor, a razão entre a medida da área total do maior pacote e a do menor é igual a:
a) $\sqrt[3]{3}$ b) $\sqrt[3]{4}$ c) $\sqrt{6}$ d) $\sqrt{8}$

16. (Ueg 2012) Em uma festa, um garçom, para servir refrigerante, utilizou uma jarra no formato de um cilindro circular reto. Durante o seu trabalho, percebeu que com a jarra completamente cheia conseguia encher oito copos de 300ml cada. Considerando-se que a altura da jarra é de 30cm, então a área interna da base dessa jarra, em cm, é
a) 10 b) 30 c) 60 d) 80

17. Um aluno do curso de Automação Industrial resolveu armazenar parafina liquida em dois recipientes: um na forma de um prisma quadrangular regular e outro na forma de um cilindro circular reto cujas medidas estão indicadas abaixo:

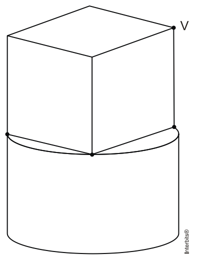


Adote $\pi = 3{,}14$

Sobre esses recipientes é correto afirmar:

a) No recipiente 1 cabe mais parafina que no recipiente 2
b) No recipiente 1 cabe menos parafina que no recipiente 2
c) Tanto no recipiente 1 quanto no recipiente 2 cabem a mesma quantidade de parafina
d) Tanto no recipiente 1 quanto no recipiente 2 cabem menos de 6,1 litros de parafina
e) Tanto no recipiente 1 quanto no recipiente 2 cabem mais de 6,3 litros de parafina

18. (Insper 2012) Na figura a seguir, a base inferior do cubo de aresta a está inscrita na base superior do cilindro circular reto de altura a.

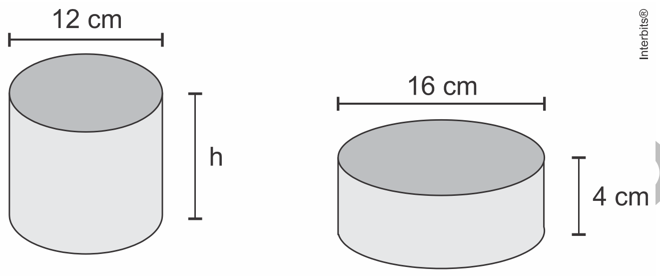


A distância entre o vértice V do cubo e o centro da base inferior do cilindro é igual a

a) $\frac{5a\sqrt{3}}{2}$. b) $\frac{5a\sqrt{2}}{2}$. c) $\frac{3a\sqrt{3}}{2}$.
d) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. e) $\frac{3a\sqrt{2}}{2}$.

19. (Ulbra 2012) A Gestão Ambiental visa ao uso de práticas que garantem a conservação e a preservação da biodiversidade, a reciclagem das matérias-primas e a redução do impacto ambiental das atividades humanas sobre os recursos naturais. Consciente da importância de reaproveitar sobras de madeira, uma serraria que trabalha apenas com madeira de reflorestamento resolveu calcular a sobra de madeira na confecção de peças cilíndricas. Para confeccionar uma peça cilíndrica, a serraria faz os cortes adequados em um prisma quadrangular de arestas da base 5 cm e altura 0,8 m e obtém um cilindro de 5 cm de diâmetro e 0,8 m de altura. A sobra de madeira na fabricação de mil destas peças é, em cm^3 (utilize $\pi = 3,14$), a seguinte:
a) $4,3 \times 10^{-5}$.
b) 430.
c) $4,3 \times 10^{5}$.
d) 1 570.
e) 2 000.

20. (Ufpr 2012) As duas latas na figura abaixo possuem internamente o formato de cilindros circulares retos, com as alturas e diâmetros da base indicados. Sabendo que ambas as latas têm o mesmo volume, qual o valor aproximado da altura h?

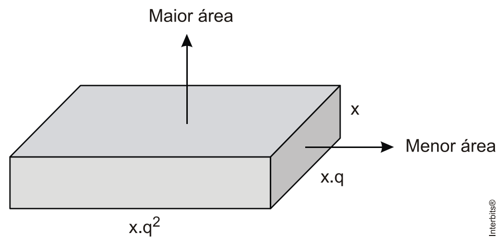


a) 5 cm.
b) 6 cm.
c) 6,25 cm.
d) 7,11 cm.
e) 8,43 cm.

Gabarito:

Resposta da questão 1:

a)



Perímetro do quadrado de maior área: P_1
Perímetro do quadrado de menor área: P_2

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{2x.q^2 + 2.x.q}{2x + 2.x.q} = \frac{2x.q(q+1)}{2x(1+q)} = q$$

b) Se q = 2, as dimensões do paralelepípedo são: x, 2x e 4x, e sua área total será dada por:

$$2.(x.2x + x.4x + 2x.4x) = 252$$

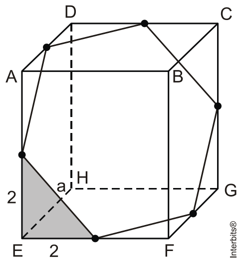
$$28x^2 = 252$$

$$x^2 = 9$$

$$x = 3$$

Portanto, as dimensões do paralelepípedo são 3, 6 e 12, e seu volume V será dado por:
$V = 3.6.12 = 156\ m^3$.

Resposta da questão 2: [C]



O polígono formado é um hexágono regular de lado *a*.

$$a^2 = 2^2 + 2^2$$

$$a = \sqrt{8}$$

$$a = 2\sqrt{2}$$

Portanto o perímetro do hexágono regular é:

$$P = 6.2\sqrt{2}$$

$$P = 12\sqrt{2}$$

Resposta da questão 3:

a) O perímetro da folha após a retirada dos quatro cantos é

$$2 \cdot [(23-6)+(14-6)] + 8 \cdot 3 = 74\ \text{u.c.}$$

Note que o perímetro da folha antes da retirada dos quatro cantos também mede $74\ \text{u.c.}$

b) A área da folha de papelão após a retirada dos quatro cantos é dada por

$$23 \cdot 14 - 4 \cdot 3^2 = 322 - 36$$
$$= 286\ \text{u.a.}$$

c) A caixa formada tem dimensões $17 \times 8 \times 3.$ Portanto, seu volume é igual a

$$17 \cdot 8 \cdot 3 = 408\ \text{u.v.}$$

Resposta da questão 4: [C]

O volume da embalagem é dado por

$$\frac{3 \cdot 10^2 \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot 6 = 900\sqrt{3}\ \text{cm}^3.$$

Resposta da questão 5: [C]

Considerando que a peça é formada por 14 cubos (nove no 1º nível, quatro no 2º e um no 3º), segue que o número de faces a serem pintadas, após a peça estar montada, é

$$\underbrace{3 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 1}_{1^{\text{o}}\ \text{nível}} + \underbrace{3 \cdot 3 + 2}_{2^{\text{o}}\ \text{nível}} + \underbrace{5}_{3^{\text{o}}\ \text{nível}} = 42.$$

Portanto, como cada face consome $\frac{300}{6} = 50\,\text{mL}$ de tinta, concluímos que o número de litros necessários para pintar completamente a peça é igual a $\frac{42 \cdot 50}{1000} = 2{,}1.$

Resposta da questão 6:

O depósito pode ser dividido em um paralelepípedo reto-retângulo de dimensões $0{,}9\,\text{cm} \times 3\,\text{cm} \times 7{,}2\,\text{cm};$ e um prisma triangular reto de altura $7{,}2\,\text{cm},$ com uma das arestas da base medindo $3\,\text{cm}$ e altura relativa $0{,}6\,\text{cm}.$

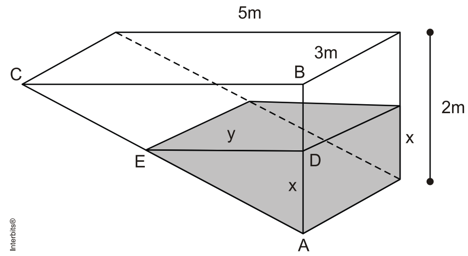
Logo, a capacidade do depósito da maquete é dada por

$$0{,}9 \cdot 3 \cdot 7{,}2 + \frac{3 \cdot 0{,}6}{2} \cdot 7{,}2 = 25{,}92\,\text{cm}^3.$$

Portanto, como a escala adotada é $1:500$ e $1\text{cm}^3 = 10^{-6}\ \text{m}^3,$ segue que a medida real da capacidade do depósito é

$$\frac{25{,}92 \cdot 500^3}{10^6} = 3240\ \text{m}^3.$$

Resposta da questão 7:



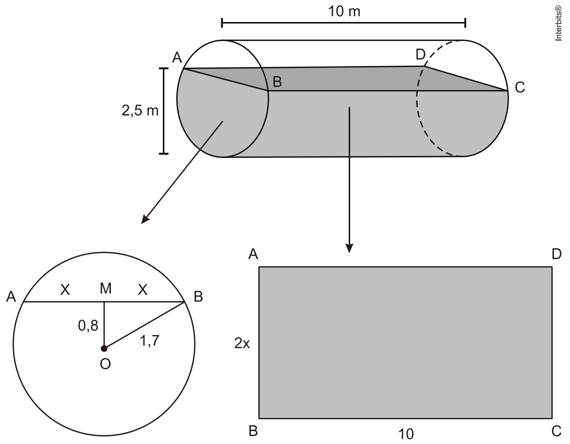
a) $V = \frac{5.2.3}{2} = 15\text{m}^3.$

b) $\Delta ADE \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{5} \Rightarrow y = \frac{5x}{2}.$

Calculando agora o volume V_L do líquido, temos:

$$V_L = \frac{x.y.3}{2} = \frac{x.\frac{5x}{2}.3}{2} = \frac{15x^2}{4}\left(0 \le x \le 2\right).$$

Resposta da questão 8:



a) Considerando o cilindro de raio da base 1,7 e altura 10, o volume será dado por

$$V = \pi.(1{,}7)^2.10 = 28{,}9\pi.$$

b) Aplicando o teorema de Pitágoras no ΔOMB (O é o centro da circunferência):

$x^2 + (0{,}8)^2 = (1{,}7)^2 \Rightarrow x = 1{,}5$

Portanto, a área do retângulo ABCD será dada por:

$A = 2x.10 = 2.(1{,}5).10 = 30\ m^2$.

Resposta da questão 9: [B]

O volume da coluna na maquete é dado por

$$\pi \cdot \left(\frac{2}{2}\right)^2 \cdot 9 \cong 3{,}14 \cdot 1 \cdot 9 = 28{,}26\text{cm}^3 = 28{,}26 \cdot 10^{-6}\ \text{m}^3.$$

Como a escala da maquete é de $1:100$, segue que o volume pedido é tal que

$$\frac{28{,}26 \cdot 10^{-6}}{V} = \left(\frac{1}{100}\right)^3 \Leftrightarrow V = 28{,}26\ \text{m}^3.$$

Resposta da questão 10: [E]

Pelo Princípio de Arquimedes, o volume do objeto corresponde ao volume de um cilindro circular reto de raio da base igual a 4cm e altura 3cm, ou seja,

$$\pi \cdot 4^2 \cdot 3 \cong 3{,}14 \cdot 48$$
$$\cong 151\text{cm}^3.$$

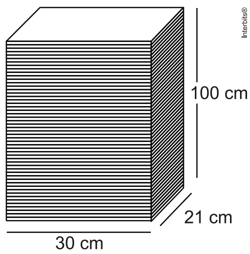
Resposta da questão 11: [B]

O volume de água armazenado é dado por $A \cdot \frac{h}{3}$, em que A é a área da base do reservatório.

Se é possível encher completamente recipientes de 20 e 50 litros cada, então o volume de água no reservatório deve é tal que $\text{mmc}(20, 50) = 100$ litros.

Portanto, como a capacidade do reservatório é dada por $A \cdot h$, vem $A \cdot \frac{h}{3} = 100 \Leftrightarrow A \cdot h = 300\ \text{L}.$

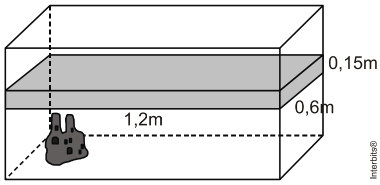
Resposta da questão 12: [E]



$V = 30 \cdot 21 \cdot 100 = 63\,000\ cm^3$.

Resposta da questão 13: [C]

Na figura, aparece destacado apenas o volume de água deslocado depois que o castelo foi colocado no aquário.



Portanto, o volume v do castelo é igual ao volume de água deslocado.

$V = 1{,}2.\ 0{,}6.0{,}15 = 0{,}108m^3 = 108dm^3$.

Resposta da questão 14: [C]

O nível da água subiria $\frac{2400}{40 \cdot 30} = 2\text{cm}$, fazendo a água ficar com $25 - 5 + 2 = 22\text{cm}$ de altura.

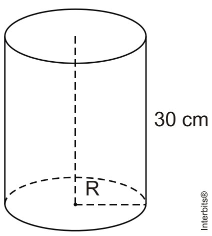
Resposta da questão 15: [B]

A razão entre os volumes é o cubo da razão se semelhança. Logo, a razão de semelhança é $k = \sqrt[3]{2}$;

A razão entre as áreas é o quadrado da razão de semelhança. Logo, a razão entre as áreas dos pacotes é

$k^2 = \sqrt[3]{2}^2 = \sqrt[3]{4}$.

Resposta da questão 16: [A]



A_b = área da base

$1\text{mL} = 1\text{cm}^3$

Volume da jarra $= 8 \cdot 30\text{mL} = 2400\text{mL} = 2400\text{cm}^3$

$A_b.30 = 2400$

$A_b = 80\text{cm}^2$

Resposta da questão 17: [C]

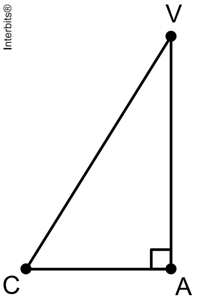
Volume do recipiente 1: $V_1 = 20 \cdot 20 \cdot 15{,}7 = 6280\text{cm}^3$

Volume do recipiente 2:

$V_2 = \pi \cdot 10^2 \cdot 20 = 3{,}14 \cdot 2000 = 6280\text{cm}^3$

Portanto, tanto no recipiente 1 quanto no recipiente 2 cabem a mesma quantidade de parafina.

Resposta da questão 18: [E]
Considere a figura, sendo A o pé da perpendicular baixada de V sobre a base inferior do cilindro e C o centro da mesma.



Como $\overline{AC}$ é igual à metade da diagonal da face do cubo, vem que $\overline{AC} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$ Além disso, $\overline{VA} = 2a$ e, portanto, pelo Teorema de Pitágoras, obtemos

$$\begin{aligned}\overline{VC}^2 = \overline{VA}^2 + \overline{AC}^2 \Leftrightarrow \overline{VC}^2 &= (2a)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 \\ \Rightarrow \overline{VC}^2 &= 4a^2 + \frac{a^2}{2} \\ \Rightarrow \overline{VC} &= \sqrt{\frac{9a^2}{2}} \\ \Rightarrow \overline{VC} &= \frac{3a\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

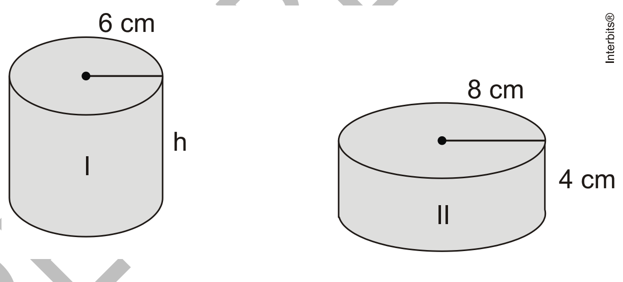
Resposta da questão 19: [C]
A sobra de madeira na fabricação de uma peça, em cm^3, é dada por

$$\begin{aligned}5^2 \cdot 80 - \pi \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 \cdot 80 &\cong 2000 \cdot \left(1 - \frac{3,14}{4}\right) \\ &= 2000 \cdot 0,215 \\ &= 430.\end{aligned}$$

Portanto, na fabricação de 1.000 peças, a sobra de madeira é $430 \cdot 1000 = 4,3 \times 10^5.$

Resposta da questão 20: [D]

$V_I = V_{II}$



$\pi.6^2.h = \pi.8^2.4$

$h = \frac{64.4}{36}$

$h \cong 7,11\,cm$